

Κβαντομηχανική II

Διάλεξη 1

3 Οκτωβρίου 2025

Σπύρος Τσέρκης



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

DEMOCRITUS
UNIVERSITY
OF THRACE

Εισαγωγικά

Επικοινωνία: stserkis@physics.duth.gr

- Ύλη:
1. Γραμμική Άλγεβρα
 2. Αρχές Κβαντομηχανικής
 3. Περιστροφές και Στροφορμή
 4. Ίδιοστροφορμή (Σπιν)
 5. Σύνθεση Στροφορμών
 6. Ταυτοτικά Σωματίδια

Αλλαγή ύλης: Δε θα διδαχθεί/εξεταστεί το άτομο του υδρογόνου

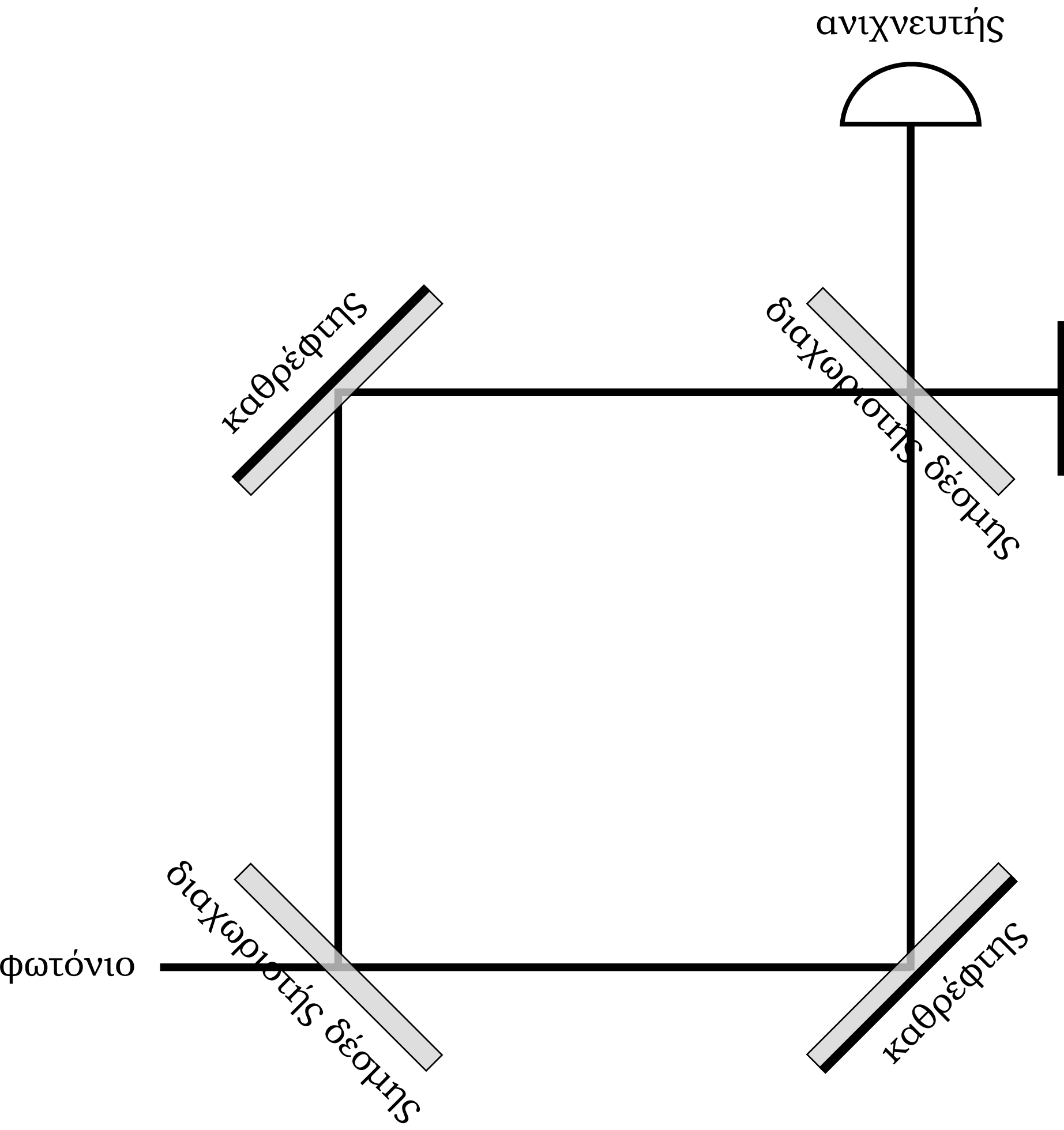
Προτεινόμενο Βιβλίο: Nouredine Zettili - “Κβαντική Μηχανική” (Ύλη: Κεφάλαια 2, 3, 5, 6.4, 7, 8)

Χρήσιμο Βιβλίο: John Townsend - “A Modern Approach to Quantum Mechanics”

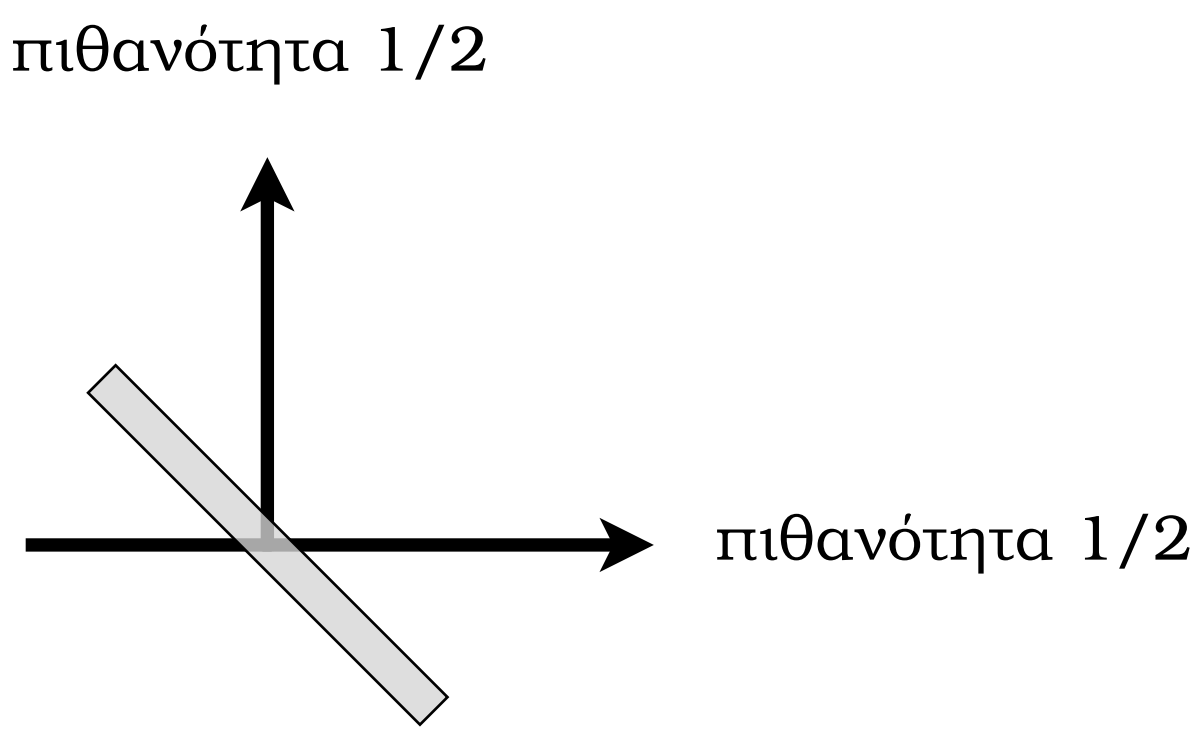
Ασκήσεις Για το Σπίτι: Θα δίνονται ασκήσεις για εξάσκηση

Τελικός Βαθμός: Τελική εξέταση μόνο

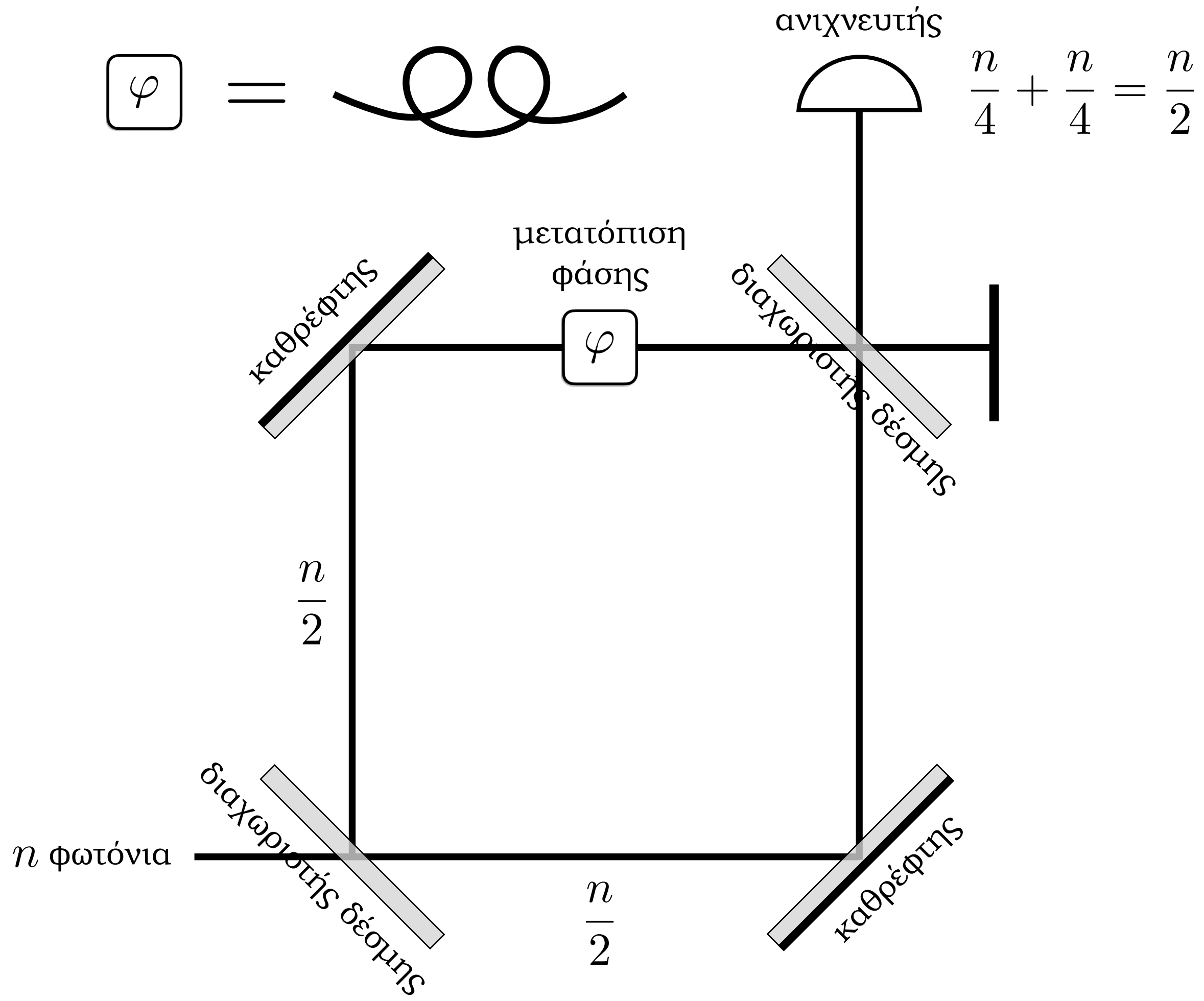
Κυματοσωματιδιακός δυϊσμός



Το συμβολόμετρο Mach-Zehnder

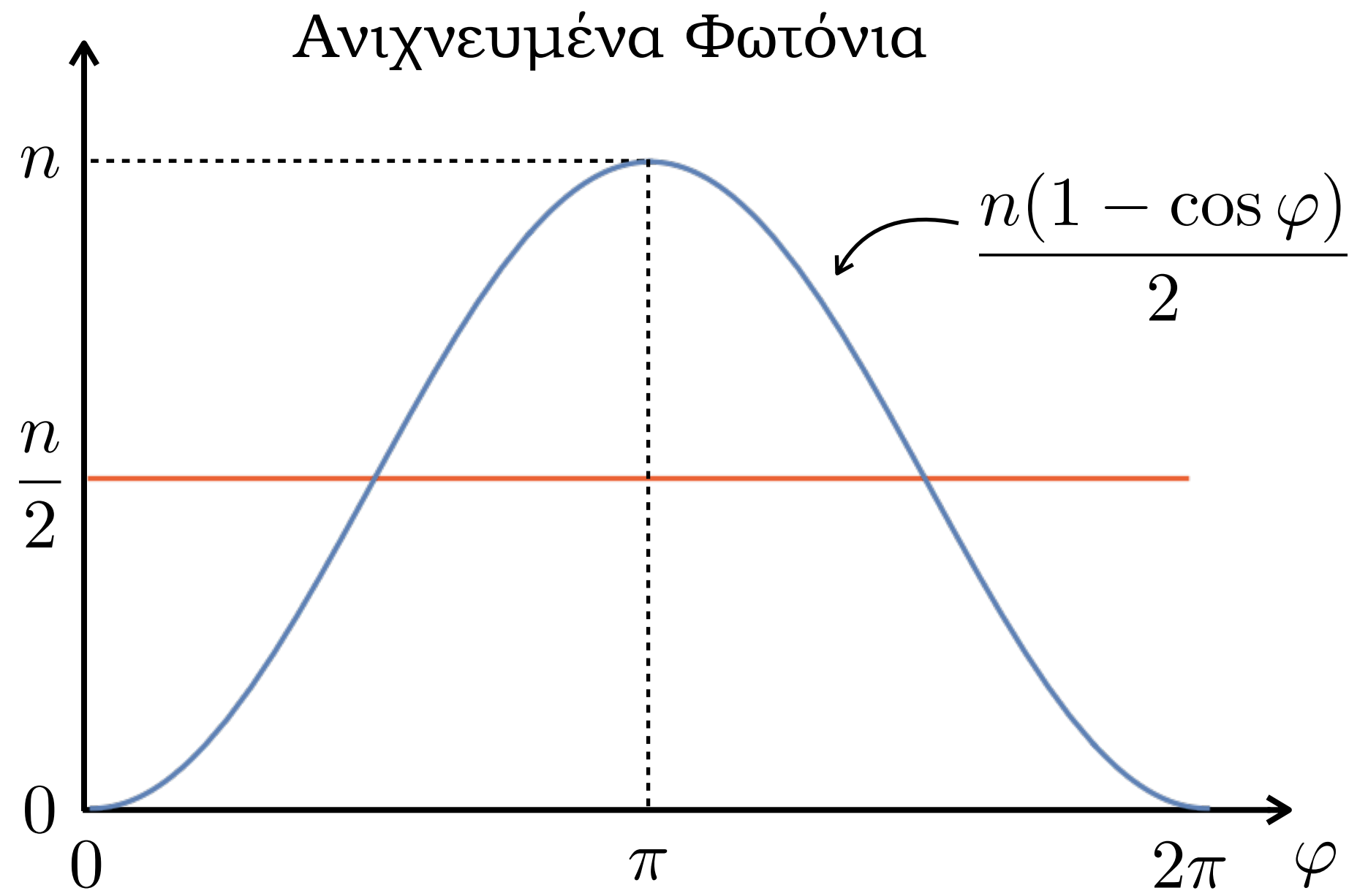


Κυματωματιδιακός δυϊσμός



Το συμβολόμετρο Mach-Zehnder

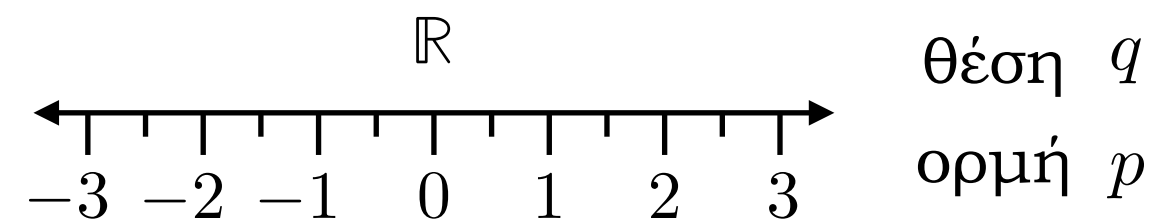
Το φωτόνιο συμπεριφέρεται σαν να συμβάλει με τον εαυτό του.



Κυματωματιδιακός Δυϊσμός
Ένα σωματίδιο συμπεριφέρεται ως υλικό σώμα αλλά και ως κύμα

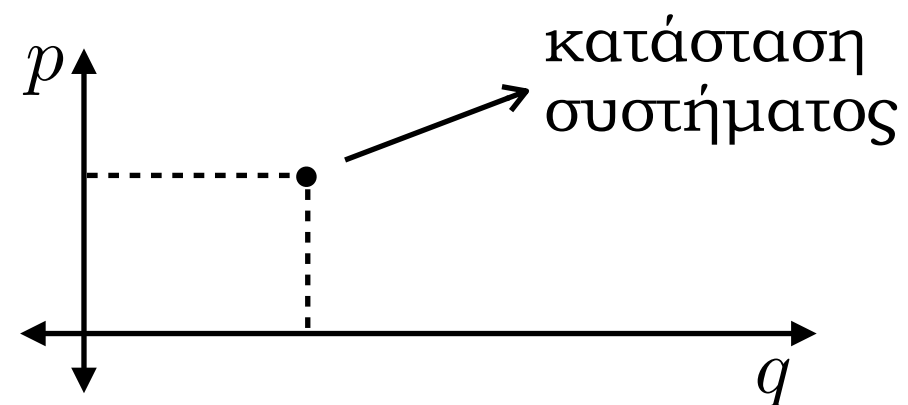
Κλασική Μηχανική

1. Μια ιδιότητα αναπαριστάται από έναν πραγματικό αριθμό

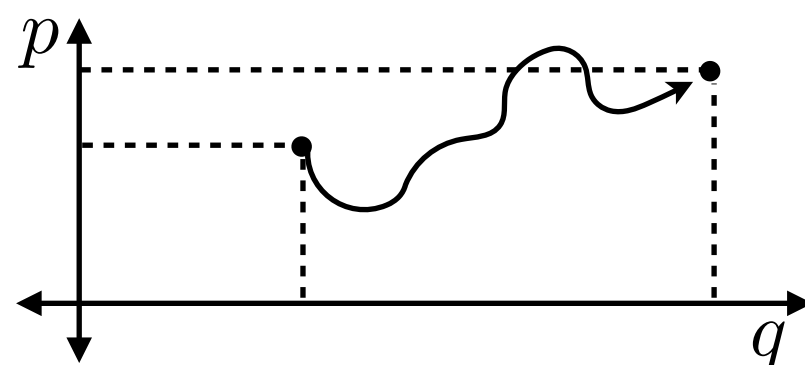


2. Η μέτρηση μιας ιδιότητας είναι ντετερμινιστική
 $q \rightarrow q$

3. Ένα σύστημα αναπαριστάται από ένα σημείο στο χώρο των φάσεων



4. Η χρονική εξέλιξη μιας ιδιότητας ή ενός συστήματος είναι ντετερμινιστική



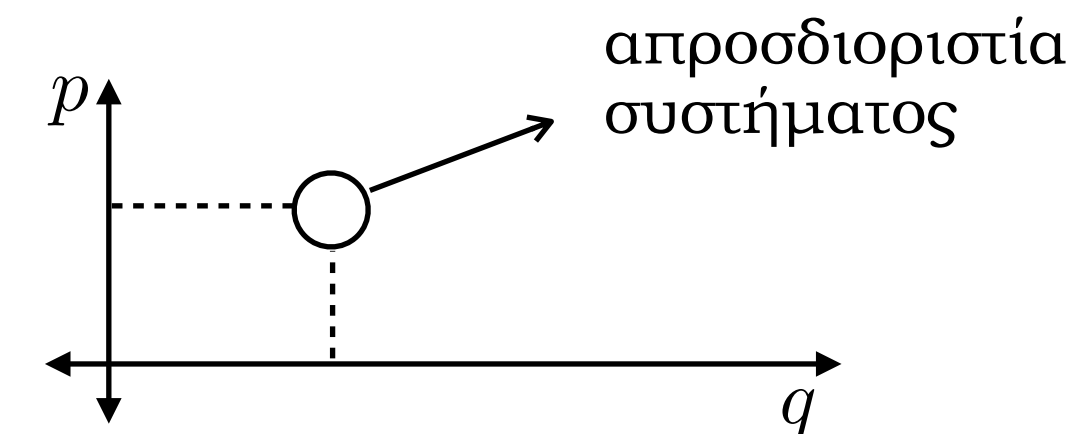
Κβαντική Μηχανική

- Μια ιδιότητα αναπαριστάται από έναν Ερμιτιανό τελεστή

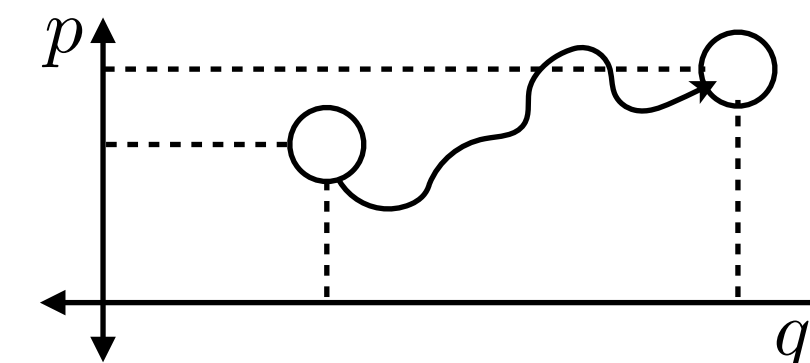
$$H = \begin{bmatrix} \star & \star \\ \star & \star \end{bmatrix} \text{πραγματικές ιδιοτιμές}$$

- Η μέτρηση μιας ιδιότητας είναι πιθανοκρατική
 $Q \rightarrow \text{ιδιοτιμή του } Q$

- Ένα σύστημα αναπαριστάται από μια επιφάνεια στο χώρο των φάσεων



- Η χρονική εξέλιξη μιας ιδιότητας ή ενός συστήματος είναι ντετερμινιστική



Διανύσματα

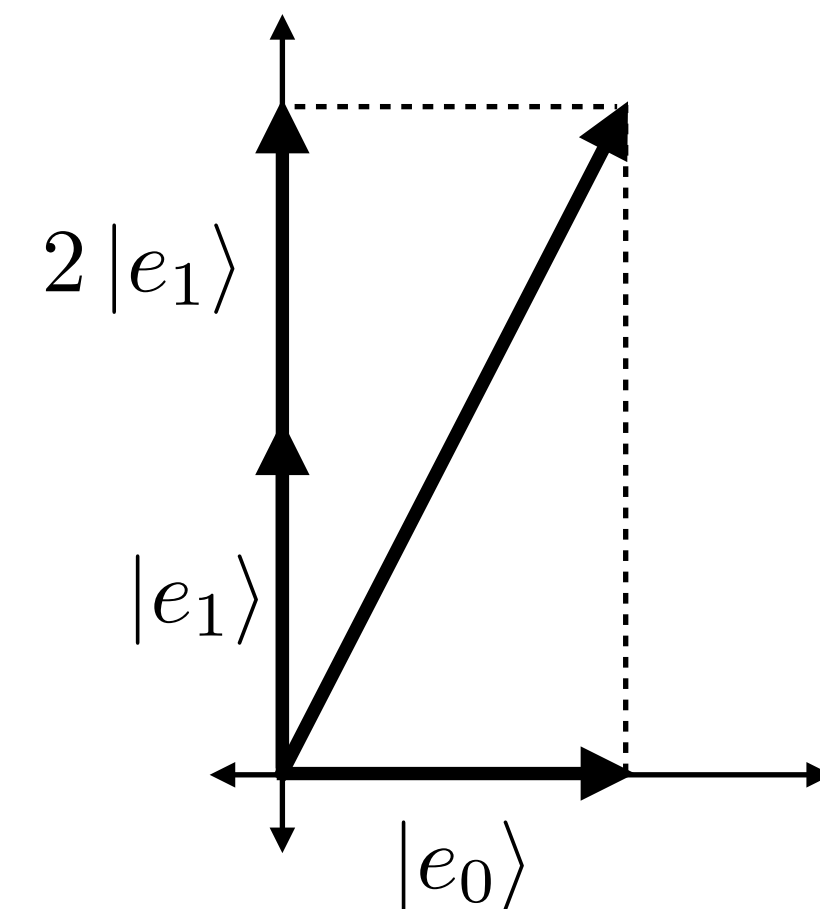
Κετ (διάνυσμα στήλης): $|y\rangle = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{d-1} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{d-1} y_i |e_i\rangle$ όπου $\{|e_0\rangle, |e_1\rangle, \dots, |e_{d-1}\rangle\}$ είναι η ορθοκανονική βάση

Για παράδειγμα: $|a\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1|e_0\rangle + 2|e_1\rangle$

Δείτε και παράδειγμα 2.5(α)

Μπρα (διάνυσμα γραμμής): $\langle x| = [x_0, x_1, \dots, x_{d-1}] = \sum_{i=0}^{d-1} x_i \langle e_i|$

Για παράδειγμα: $\langle b| = [1 \ 2] = 1 [1 \ 0] + 2 [0 \ 1] = 1 \langle e_0| + 2 \langle e_1|$



Δείτε και παράδειγμα 2.14(β)

(Ευκλείδειος) νόρμα: $\| |y\rangle \| = \sqrt{\sum_i |y_i|^2}$ $|a\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \\ 3-i \end{bmatrix}$ $\| |a\rangle \| = \sqrt{1 + |2i|^2 + |3-i|^2} = \sqrt{1 + 4 + 10} = \sqrt{15}$

Όταν η νόρμα είναι ίση με τη μονάδα λέμε το διάνυσμα κανονικοποιημένο.

Μετατροπές Διανυσμάτων

$$|y\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} y_i |e_i\rangle$$

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 - i \end{bmatrix}$$

Ανάστροφος

$$|y\rangle^{\mathsf{T}} = \sum_{i=0}^{d-1} y_i \langle e_i|$$

$$|a\rangle^{\mathsf{T}} = [1 \quad 2i \quad 3 - i]$$

Μιγαδικός Συζυγής

$$|y\rangle^* = \sum_{i=0}^{d-1} y_i^* |e_i\rangle$$

$$|a\rangle^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \\ 3 + i \end{bmatrix}$$

Δείτε και παράδειγμα 2.14(α)

Ερμιτιανός Συζυγής
(dagger)

$$|y\rangle^{\dagger} = \sum_{i=0}^{d-1} y_i^* \langle e_i|$$

$$|a\rangle^{\dagger} = [1 \quad -2i \quad 3 + i] = \langle a|$$

Δείτε και παραδείγματα 2.3(α), 2.14(α)

Εσωτερικό και Εξωτερικό Γινόμενο

Δείτε και παραδείγματα 2.6 και 2.14(γ)

Εσωτερικό γινόμενο: $\langle x|y\rangle = [x_0, x_1, \dots, x_{d-1}] \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{d-1} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{d-1} x_i y_i$

μπρα-κετ = bracket

αριθμός

$\langle x|y\rangle = 0$ ορθογώνια διανύσματα

$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{if } i \neq j. \end{cases}$ ορθοκανονική βάση

Kronecker δέτα

Άρα η νόρμα είναι ίση με $\| |y\rangle \| = \sqrt{\langle y|y\rangle}$

Για παράδειγμα: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \perp \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \perp \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

Εξωτερικό γινόμενο: $|y\rangle\langle x| = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{d-1} \end{bmatrix} [x_0 \ x_1 \ \cdots \ x_{d-1}] = \begin{bmatrix} y_0 x_0 & \cdots & y_0 x_{d-1} \\ y_1 x_0 & \cdots & y_1 x_{d-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{d-1} x_0 & \cdots & y_{d-1} x_{d-1} \end{bmatrix}$

πίνακας

Για παράδειγμα: $|a\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$ $\langle a|b\rangle = [1 \ -2i] \begin{bmatrix} 3i \\ 4 \end{bmatrix} = 3i - 8i = -5i$

$|b\rangle = \begin{bmatrix} 3i \\ 4 \end{bmatrix}$ $|a\rangle\langle b| = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} [-3i \ 4] = \begin{bmatrix} -3i & 4 \\ 6 & 8i \end{bmatrix}$

Δείτε και παράδειγμα 2.3(β)

Χώρος Χίλμπερτ

Ο χώρος Χίλμπερτ $\mathcal{H}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα των μιγαδικών αριθμών, ο οποίος:

- είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο:
 - $\diamond \langle y|y \rangle \geq 0$
 - $\diamond \langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle^*$ Δείτε και παράδειγμα 2.17(γ)
 - $\diamond \langle z|(\lambda |x\rangle + |y\rangle) = \lambda \langle z|x \rangle + \langle z|y \rangle \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (\text{Γραμμικότητα})$
- είναι εφοδιασμένος με την Ευκλείδεια νόρμα:
 - $\diamond |||y\rangle|| \geq 0$
 - $\diamond ||\lambda |y\rangle|| = |\lambda| \cdot |||y\rangle||$
 - $\diamond |||x\rangle + |y\rangle|| \leq |||x\rangle|| + |||y\rangle|| \quad (\text{Τριγωνική ανισότητα})$
$$\sqrt{(\langle x| + \langle y|)(|x\rangle + |y\rangle)} \leq \sqrt{\langle x|x \rangle} + \sqrt{\langle y|y \rangle}$$
 - $\diamond |\langle x|y \rangle| \leq |||x\rangle|| \cdot |||y\rangle||$
$$|\langle x|y \rangle|^2 \leq \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle$$
 (Cauchy-Schwarz ανισότητα)
Δείτε και παραδείγματα 2.5(γ)-(δ)
- είναι πλήρης: Για κάθε $|y\rangle$ υπάρχει ένα $|x\rangle$ ώστε $|||y\rangle - |x\rangle|| \rightarrow 0$

Τανυστικό Γινόμενο

Το τανυστικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ορίζεται ως:

$$\left. \begin{aligned} |x\rangle &= \sum_{i=0}^{d-1} x_i |e_i\rangle \\ |y\rangle &= \sum_{j=0}^{d-1} y_j |e_j\rangle \end{aligned} \right\} \longrightarrow |x\rangle \otimes |y\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} x_i y_j |e_i\rangle \otimes |e_j\rangle$$

Για δισδιάστατα διανύσματα:

$$\left. \begin{aligned} |x\rangle &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ |y\rangle &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \longrightarrow |x\rangle \otimes |y\rangle = \begin{bmatrix} x_1 |y\rangle \\ x_2 |y\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ x_2 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \end{bmatrix}$$

Για παράδειγμα:

$$\left. \begin{aligned} |a\rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} \\ |b\rangle &= \begin{bmatrix} 3i \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \longrightarrow |a\rangle \otimes |b\rangle = \begin{bmatrix} 1 |b\rangle \\ 2i |b\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 3i \\ 4 \end{bmatrix} \\ 2i \begin{bmatrix} 3i \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3i \\ 4 \\ -6 \\ 8i \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες: $(|x_1\rangle + |x_2\rangle) \otimes |y\rangle = |x_1\rangle \otimes |y\rangle + |x_2\rangle \otimes |y\rangle$

$$(\lambda |x\rangle) \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes (\lambda |y\rangle)$$

$$(|x\rangle \otimes |y\rangle)^\dagger = |x\rangle^\dagger \otimes |y\rangle^\dagger$$

Τελεστές

Ένας τελεστής είναι ένας μαθηματικός κανόνας που μετασχηματίζει ένα διάνυσμα $M |y\rangle = |y'\rangle$
 $\langle y| M = \langle y'|$

Σειρά πράξεων: $BA |y\rangle = B(A |y\rangle) = B |y'\rangle$

$$\langle y| AB = (\langle y| A)B = \langle y'| B$$

$$\begin{aligned}\langle x| BA |y\rangle &= (\langle x| B)(A |y\rangle) = \langle x'|y'\rangle \\ &= \langle x| (BA |y\rangle) = \langle x| B |y'\rangle = \langle x|y''\rangle \\ &= (\langle x| BA) |y\rangle = (\langle x'| A) |y\rangle = \langle x''|y\rangle\end{aligned}$$

Γραμμικοί τελεστές: $A(\lambda |x\rangle + \kappa |y\rangle) = \lambda A |x\rangle + \kappa A |y\rangle$
 $(\lambda \langle x| + \kappa \langle y|)A = \lambda \langle x| A + \kappa \langle y| A$

Δείτε και παράδειγμα 2.17(α)

Μοναδιαίος Τελεστής - Συνθήκη Πληρότητας

Ο μοναδιαίος ή ταυτοτικός τελεστής ορίζεται ως εξής: $I |y\rangle = |y\rangle \quad \langle y| I = \langle y| \quad IX = XI = X$

$$\begin{aligned}
 \text{Συνθήκη πληρότητας: } I &= \sum_{i=0}^{d-1} |e_i\rangle\langle e_i| = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Τελεστής ως Πίνακας

$$X = IXI$$

$$= \sum_{i=0}^{d-1} |e_i\rangle\langle e_i| X \sum_{j=0}^{d-1} |e_j\rangle\langle e_j|$$

$$= \sum_{i,j=0}^{d-1} |e_i\rangle\langle e_i| X |e_j\rangle\langle e_j|$$

$$= \sum_{i,j=0}^{d-1} \langle e_i| X |e_j\rangle |e_i\rangle\langle e_j|$$

$$= \sum_{i,j=0}^{d-1} x_{ij} |e_i\rangle\langle e_j|$$

$$= \begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & \cdots & x_{0,d-1} \\ x_{10} & x_{11} & \cdots & x_{1,d-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{d-1,0} & x_{d-1,1} & \cdots & x_{d-1,d-1} \end{bmatrix}$$

$\nwarrow \langle e_0| X |e_1\rangle$

Απόδειξη Cauchy-Schwarz ανισότητας $|\langle x|y\rangle|^2 \leq \langle x|x\rangle \langle y|y\rangle$

$$\langle x|x\rangle \langle y|y\rangle = \langle x| I |x\rangle \langle y|y\rangle$$

$$= \sum_{i=0}^{d-1} \langle x|e_i\rangle \langle e_i|x\rangle \langle y|y\rangle \quad (\text{συνθήκη πληρότητας})$$

$$\geq \langle x|e_j\rangle \langle e_j|x\rangle \langle y|y\rangle \quad |e_j\rangle = \frac{|y\rangle}{\|y\|}$$

$$= \frac{\langle x|y\rangle \langle y|x\rangle \langle y|y\rangle}{\langle y|y\rangle} \quad |e_j\rangle \in \{|e_0\rangle, \dots, |e_{d-1}\rangle\}$$

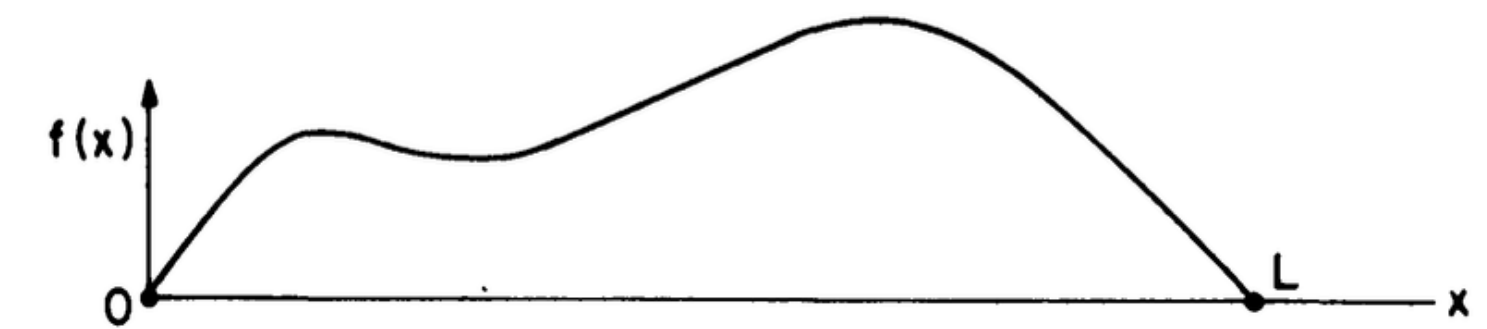
$$= \langle x|y\rangle \langle y|x\rangle$$

$$= |\langle x|y\rangle|^2$$

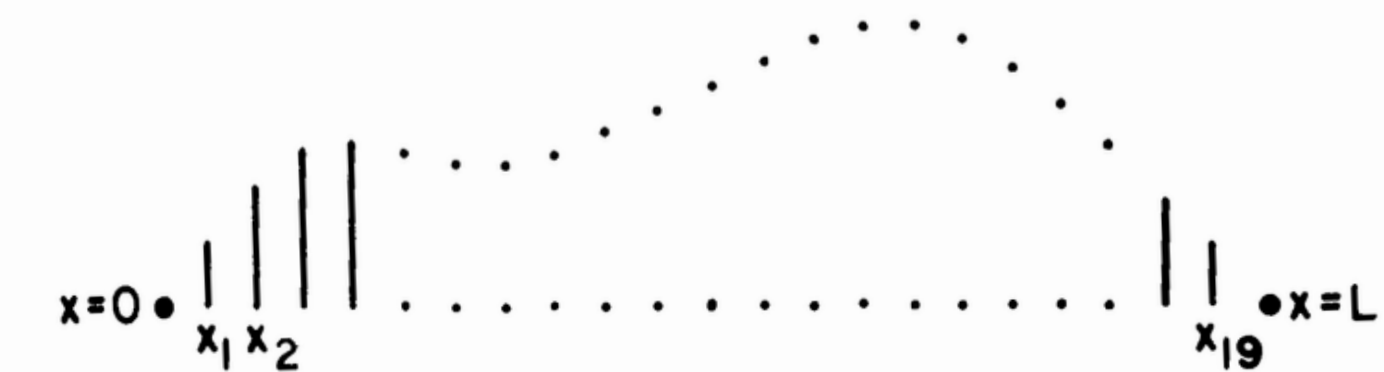
Συναρτήσεις ως Διανύσματα

Διακριτοποίηση Συνάρτησης: $f(x) \rightarrow |f_n\rangle = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n f(x_i) |x_i\rangle$

Εσωτερικό γινόμενο: $\langle f_n | g_n \rangle = \sum_{i=1}^n f(x_i)^* g(x_i)$



Συνάρτησης ως διάνυσμα: $f(x) \rightarrow |f\rangle$ (χωρίς διακριτοποίηση)



(εικόνα από το βιβλίο του Shankar)

Εσωτερικό γινόμενο: $\langle f | g \rangle = \int_0^L dx f(x)^* g(x)$

Τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις: $\langle f | f \rangle = \int_0^L dx |f(x)|^2 < \infty$ (πεπερασμένος αριθμός)

Dirac Δέλτα

$$\text{Η γενική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως } f(x) = \langle x|f\rangle = \langle x| I |f\rangle = \int_a^b dy \langle x|y\rangle \langle y|f\rangle \qquad \int_a^b dy |y\rangle\langle y| = I$$

$$\text{Άρα ισχύει και το εξής } f(y) = \langle y|f\rangle$$

Συνθήκη πληρότητας

$$\text{Έστω πως } \langle x|y\rangle = \delta(x, y)$$

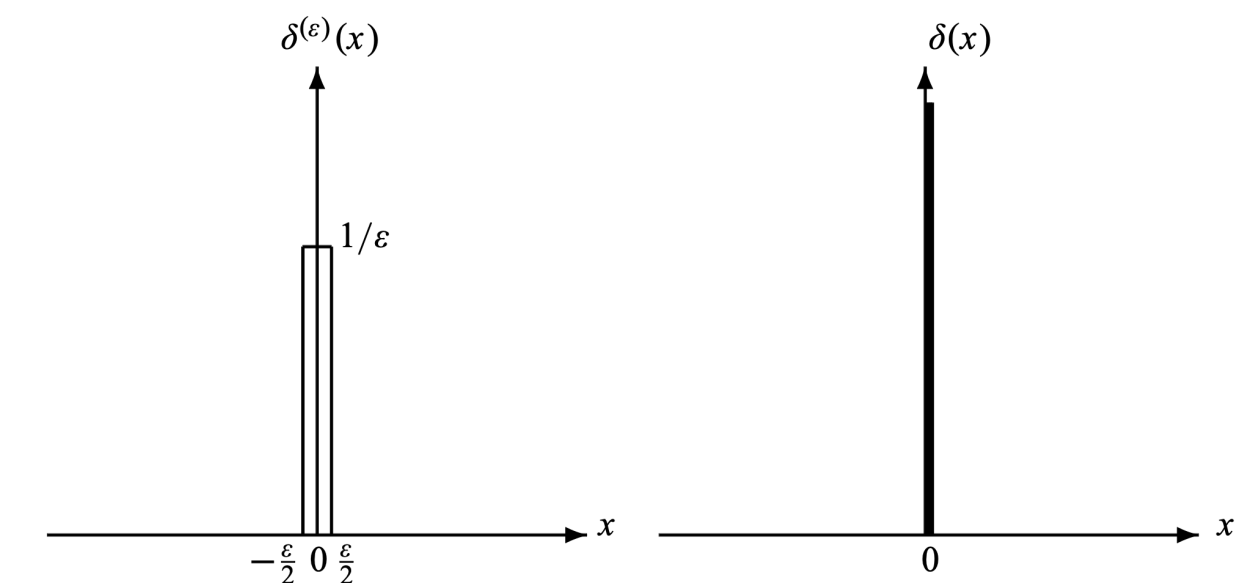
$$\text{Όταν το } y \text{ είναι κοντά στην περιοχή του } x \text{ έχουμε } f(x) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} dy \delta(x, y) f(y) \Leftrightarrow f(x) = f(x) \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} dy \delta(x, y)$$

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} dy \delta(x, y) = 1 \Leftrightarrow \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} dy \delta(x - y) = 1$$

Η ποσότητα $\delta(x - y)$ δεν μπορεί να είναι πεπερασμένη άρα θα πρέπει η τιμή της να τείνει στο άπειρο έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \delta(x - y) &= 0 \quad \text{όταν } x \neq y \\ \int_a^b dy \delta(x - y) &= 1 \quad \text{όταν } a < x < b \end{aligned}$$

$$\text{Άρα μπορούμε να χρησιμοποιούμε τη σχέση } f(x) = \int_a^b dy \delta(x - y) f(y)$$



(εικόνα από το βιβλίο του Zettili)