

Κβαντομηχανική II

Διάλεξη 10

5 Δεκεμβρίου 2025

Σπύρος Τσέρκης



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

DEMOCRITUS
UNIVERSITY
OF THRACE

Τανυστικό Γινόμενο

Έστω πως έχουμε δύο πίνακες που τα στοιχεία τους μπορεί να είναι και αυτοί πίνακες

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

Το τανυστικό τους γινόμενο ορίζεται ως

$$X \otimes Y = \begin{bmatrix} X_{11} \otimes Y & X_{12} \otimes Y \\ X_{21} \otimes Y & X_{22} \otimes Y \end{bmatrix}$$

Εάν τα στοιχεία του πίνακα X είναι βαθμωτά στοιχεία, δηλαδή πίνακες 1×1 , τότε το τανυστικό γινόμενο γίνεται ένα απλό γινόμενο.

$$X \otimes Y = \begin{bmatrix} x_{11} Y & x_{12} Y \\ x_{21} Y & x_{22} Y \end{bmatrix}$$

Το τανυστικό γινόμενο ενός πίνακα $m \times n$ και ενός πίνακα $k \times \ell$ είναι ένας πίνακας $(m \cdot k) \times (n \cdot \ell)$

Ένωση Διανυσματικών Χώρων Χίλμπερτ

Έστω πως δύο διανύσματα βρίσκονται σε δύο διαφορετικούς χώρους Χίλμπερτ:

$$|x\rangle \in \mathcal{H}^A \quad |y\rangle \in \mathcal{H}^B$$

Το τανυστικό τους γινόμενο βρίσκεται στον χώρο που ορίζεται από το τανυστικό γινόμενο των δύο χώρων Χίλμπερτ

$$|x\rangle \otimes |y\rangle \in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$$

Έστω ένας τελεστής K που δρα στον χώρο Χίλμπερτ $\mathcal{H}^A$ και ένας τελεστής L που δρα στον χώρο Χίλμπερτ $\mathcal{H}^B$

$$K |x\rangle \rightarrow |x'\rangle \in \mathcal{H}^A \quad L |y\rangle \rightarrow |y'\rangle \in \mathcal{H}^B$$

Συνολικά μπορούμε να γράψουμε

$$K |x\rangle \otimes L |y\rangle \rightarrow |x'\rangle \otimes |y'\rangle \in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B = \mathcal{H}^{AB}$$

Οι διαστάσεις του χώρου $\mathcal{H}^{AB}$ είναι

$$\dim \mathcal{H}^{AB} = \dim \mathcal{H}^A \times \dim \mathcal{H}^B$$

Το άθροισμα των τελεστών K και L είναι

$$(K \otimes I) + (I \otimes L)$$

Γενικός Φορμαλισμός Σύνθεσης Στροφορμών

Έστω πως έχουμε τους παρακάτω τελεστές στροφορμής που αναφέρονται είτε σε διαφορετικά σωματίδια είτε σε διαφορετικές στροφορμές του ίδιου σωματιδίου.

$$\vec{J}_1 = \begin{bmatrix} J_{1x} \\ J_{1y} \\ J_{1z} \end{bmatrix} \quad \vec{J}_2 = \begin{bmatrix} J_{2x} \\ J_{2y} \\ J_{2z} \end{bmatrix}$$

Συντομογραφία

Η ολική στροφορμή δίνεται από τον τελεστή: $\vec{J} = (\vec{J}_1 \otimes I) + (I \otimes \vec{J}_2)$

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} J_{1x} \otimes I \\ J_{1y} \otimes I \\ J_{1z} \otimes I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \otimes J_{2x} \\ I \otimes J_{2y} \\ I \otimes J_{2z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J_{1x} \otimes I + I \otimes J_{2x} \\ J_{1y} \otimes I + I \otimes J_{2y} \\ J_{1z} \otimes I + I \otimes J_{2z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_x &= J_{1x} + J_{2x} \\ J_y &= J_{1y} + J_{2y} \\ J_z &= J_{1z} + J_{2z} \end{aligned}$$

Γενικός Φορμαλισμός Σύνθεσης Στροφορμών

Αυτή η θεωρία μπορεί να εφαρμοστεί στις εξής περιπτώσεις:

- τροχιακή στροφορμή και σπιν ίδιου σωματιδίου: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$
- τροχιακή στροφορμή και τροχιακή στροφορμή διαφορετικών σωματιδίων: $\vec{J} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$
- σπιν και σπιν διαφορετικών σωματιδίων: $\vec{J} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$

Αντίστοιχα έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \vec{J}^2 &= J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \\ \vec{J}_1^2 &= J_{1x}^2 + J_{1y}^2 + J_{1z}^2 \\ \vec{J}_2^2 &= J_{2x}^2 + J_{2y}^2 + J_{2z}^2 \\ J_{1\pm} &= J_{1x} \pm iJ_{1y} \\ J_{2\pm} &= J_{2x} \pm iJ_{2y} \end{aligned} \right\} \text{αυτά δεν είναι συντομογραφίες γιατί είναι στον ίδιο χώρο}$$

Ισχύουν οι σχέσεις μετάθεσης:

$$\begin{aligned} [J_{1x}, J_{1y}]_- &= i\hbar J_{1z} & [J_{2x}, J_{2y}]_- &= i\hbar J_{2z} \\ [J_{1y}, J_{1z}]_- &= i\hbar J_{1x} & [J_{2y}, J_{2z}]_- &= i\hbar J_{2x} & [J_{1i}, J_{2j}]_- &= 0 \\ [J_{1z}, J_{1x}]_- &= i\hbar J_{1y} & [J_{2z}, J_{2x}]_- &= i\hbar J_{2y} \end{aligned}$$

Γενικός Φορμαλισμός Σύνθεσης Στροφορμών

Για την κάθε στροφορμή ξεχωριστά έχουμε:

$$\vec{J}_1^2 |j_1, m_1\rangle = \hbar^2 j_1(j_1 + 1) |j_1, m_1\rangle \quad \vec{J}_2^2 |j_2, m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2 + 1) |j_2, m_2\rangle$$

$$J_{1z} |j_1, m_1\rangle = \hbar m_1 |j_1, m_1\rangle \quad J_{2z} |j_2, m_2\rangle = \hbar m_2 |j_2, m_2\rangle$$

Άρα ο χώρος Χίλμπερτ που ανήκουν τα ιδιοδιανύσματα έχουν διαστάσεις $2j_1 + 1$ και $2j_2 + 1$ αντίστοιχα.

Οι ιδιοκαταστάσεις γράφονται μαζί ως τανυστικό γινόμενο: $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$

$$(\vec{J}_1^2 \otimes I)(|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle) = \hbar^2 j_1(j_1 + 1) |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$$

$$(J_{1z} \otimes I)(|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle) = \hbar m_1 |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$$

$$(I \otimes \vec{J}_2^2)(|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle) = \hbar^2 j_2(j_2 + 1) |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$$

$$(I \otimes J_{2z})(|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle) = \hbar m_2 |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Ο ταυτοτικός τελεστής πολλές φορές λείπει γιατί εννοείται η ύπαρξή του.

$$\text{Έχουμε } (\langle j'_1, m'_1| \otimes \langle j'_2, m'_2|)(|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle) = \langle j'_1, m'_1|j_1, m_1\rangle \langle j'_2, m'_2|j_2, m_2\rangle = \delta_{j'_1, j_1} \delta_{m'_1, m_1} \delta_{j'_2, j_2} \delta_{m'_2, m_2}$$

Άρα ο χώρος Χίλμπερτ που ανήκουν τα ολικά ιδιοδιανύσματα έχει διαστάσεις: $(2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1)$

$$\text{Αντίστοιχα έχουμε: } (J_{1\pm} \otimes I)(|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle) = \hbar \sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)} |j_1, m_1 \pm 1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$$

$$(I \otimes J_{2\pm})(|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle) = \hbar \sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 + 1)} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2 \pm 1\rangle$$

Ιδιοκαταστάσεις Δύο Σωματιδίων Σπιν 1/2

Το πρώτο σωματίδιο έχει ιδιοκαταστάσεις σπιν: $\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle_1 = |0\rangle_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_2$ και $\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle_1 = |1\rangle_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_2$

Το δεύτερο σωματίδιο έχει ιδιοκαταστάσεις σπιν: $\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle_2 = |0\rangle_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_2$ και $\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle_2 = |1\rangle_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_2$

Συνολικά έχουμε τις ιδιοκαταστάσεις:

$$|00\rangle = |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |10\rangle = |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|01\rangle = |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |11\rangle = |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle \in \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_4$$

Δράση Τελεστών στο Ολικό Σύστημα Δύο Σωματιδίων Σπιν 1/2

Έστω πως ενδιαφερόμαστε για την ιδιοκατάσταση $|0\rangle \otimes |0\rangle$, τότε η δράση των τελεστών στροφορμής είναι:

$$(\vec{S}_1^2 \otimes I)(|0\rangle \otimes |0\rangle) = \hbar^2 s_1(s_1 + 1) |0\rangle \otimes |0\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\vec{S}_1^2 |00\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |00\rangle$$

$$(I \otimes \vec{S}_2^2)(|0\rangle \otimes |0\rangle) = \hbar^2 s_2(s_2 + 1) |0\rangle \otimes |0\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\vec{S}_2^2 |00\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |00\rangle$$

$$(S_{1z} \otimes I)(|0\rangle \otimes |0\rangle) = \hbar m_{s_1} |0\rangle \otimes |0\rangle = \frac{\hbar}{2} |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$S_{1z} |0\rangle = \frac{\hbar}{2} |00\rangle$$

$$(I \otimes S_{2z})(|0\rangle \otimes |0\rangle) = \hbar m_{s_2} |0\rangle \otimes |0\rangle = \frac{\hbar}{2} |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$S_{2z} |0\rangle = \frac{\hbar}{2} |00\rangle$$

$$(S_{1+} \otimes I)(|0\rangle \otimes |0\rangle) = 0$$

$$S_{1+} |00\rangle = 0$$

$$(I \otimes S_{2+})(|0\rangle \otimes |0\rangle) = 0$$

$$S_{2+} |00\rangle = 0$$

$$(S_{1-} \otimes I)(|0\rangle \otimes |0\rangle) = \hbar \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)} (|1\rangle \otimes |0\rangle) = \hbar |1\rangle \otimes |0\rangle$$

$$S_{1-} |00\rangle = \hbar |10\rangle$$

$$(I \otimes S_{1-})(|0\rangle \otimes |0\rangle) = \hbar \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)} (|0\rangle \otimes |1\rangle) = \hbar |0\rangle \otimes |1\rangle$$

$$S_{2-} |00\rangle = \hbar |01\rangle$$

Ιδιοκαταστάσεις Δύο Σωματιδίων Τροχιακής Στροφορμής $\ell = 1$

Το πρώτο σωματίδιο έχει ιδιοκαταστάσεις τροχιακής στροφορμής: $|1, -1\rangle_1$, $|1, 0\rangle_1$ και $|1, 1\rangle_1$

Το δεύτερο σωματίδιο έχει ιδιοκαταστάσεις τροχιακής στροφορμής: $|1, -1\rangle_2$, $|1, 0\rangle_2$ και $|1, 1\rangle_2$

Κάθε μία ιδιοκατάσταση ανήκει στον τρισδιάστατο χώρο Χίλμπερτ $\mathcal{H}_3$

Συνολικά έχουμε τις ιδιοκαταστάσεις:

$ 1, -1\rangle_1 \otimes 1, -1\rangle_2$	$ 1, 0\rangle_1 \otimes 1, -1\rangle_2$	$ 1, 1\rangle_1 \otimes 1, -1\rangle_2$
$ 1, -1\rangle_1 \otimes 1, 0\rangle_2$	$ 1, 0\rangle_1 \otimes 1, 0\rangle_2$	$ 1, 1\rangle_1 \otimes 1, 0\rangle_2$
$ 1, -1\rangle_1 \otimes 1, 1\rangle_2$	$ 1, 0\rangle_1 \otimes 1, 1\rangle_2$	$ 1, 1\rangle_1 \otimes 1, 1\rangle_2$

Κάθε μία ιδιοκατάσταση του ολικού συστήματος ανήκει στον εννιαδιάστατο χώρο Χίλμπερτ $\mathcal{H}_9$

Δράση Τελεστών στο Ολικό Σύστημα Τροχιακών Στροφορμών

Έστω πως ενδιαφερόμαστε για την ιδιοκατάσταση $|1, 1\rangle \otimes |1, 1\rangle$, τότε η δράση των τελεστών στροφορμής είναι:

$$\vec{L}_1^2 |1, 1\rangle |1, 1\rangle = 2\hbar^2 |1, 1\rangle |1, 1\rangle$$

$$\vec{L}_2^2 |1, 1\rangle |1, 1\rangle = 2\hbar^2 |1, 1\rangle |1, 1\rangle$$

$$L_{1z} |1, 1\rangle |1, 1\rangle = \hbar |1, 1\rangle |1, 1\rangle$$

$$L_{1+} |1, 1\rangle |1, 1\rangle = 0$$

$$L_{2z} |1, 1\rangle |1, 1\rangle = \hbar |1, 1\rangle |1, 1\rangle$$

$$L_{2+} |1, 1\rangle |1, 1\rangle = 0$$

$$L_{1-} |1, 1\rangle |1, 1\rangle = \sqrt{2}\hbar |1, 0\rangle |1, 1\rangle$$

$$L_{2-} |1, 1\rangle |1, 1\rangle = \sqrt{2}\hbar |1, 1\rangle |1, 0\rangle$$