

Κβαντομηχανική II

Διάλεξη 11

12 Δεκεμβρίου 2025

Σπύρος Τσέρκης



Ιδιοκαταστάσεις Ολικής Στροφορμής

Έστω πως έχουμε τον τελεστή ολικής στροφορμής $\vec{J} = (\vec{J}_1 \otimes I) + (I \otimes \vec{J}_2) = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$

Γνωρίζουμε πως οι τελεστές $\vec{J}^2$ και J_z έχουν ιδιοκαταστάσεις τα τανυστικά γινόμενα: $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$

Γνωρίζουμε πως ισχύει $I = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \langle j_1, m_1| \langle j_2, m_2|$

Άρα μπορούμε να βρούμε μια καινούρια (ολική) βάση ιδιοκαταστάσεων $\{|j, m\rangle\}$ ως εξής:

Έχουμε $|j, m\rangle = I |j, m\rangle$

$$= \left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} (|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle) (\langle j_1, m_1| \otimes \langle j_2, m_2|) \right] |j, m\rangle$$

$$= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} [(\langle j_1, m_1| \otimes \langle j_2, m_2|) |j, m\rangle] |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$$

$$= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} c_{m_1, m_2} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$$

Συντελεστές Clebsch-Gordan

Άρα η νέα βάση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός της παλιάς.

Ιδιοκαταστάσεις Ολικής Στροφορμής

Για τους τελεστές ολικής στροφορμής $\vec{J}^2$ και J_z έχουμε: $\vec{J}^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle$
 $J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle$

Δεδομένου πως $(J_{1z} \otimes I)(|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle) = \hbar m_1 |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$
 $(I \otimes J_{2z})(|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle) = \hbar m_2 |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$

Έχουμε $J_z = J_{1z} \otimes I + I \otimes J_{2z} \Rightarrow (J_{1z} \otimes J_{2z})(|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle) = \hbar(m_1 + m_2) |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$

Από το οποίο προκύπτει πως $\boxed{m = m_1 + m_2}$, άρα

$$|j, m\rangle = \sum_{m=m_1+m_2} c_{m_1, m_2} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$$

Μπορούμε να βρούμε την μέγιστη τιμή του συνολικού m : $m_{\max,1} + m_{\max,2} = m_{\max} \Rightarrow j_1 + j_2 = j$

Ιδιοκαταστάσεις Ολικής Στροφορμής

Οι διαστάσεις του συνολικού χώρου Χίλμπερτ $\mathcal{H}_{2j_1+1}^{(A)} \otimes \mathcal{H}_{2j_2+1}^{(B)}$ είναι $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$.

Βρήκαμε πως η τιμή του j της συνολικής στροφορμής είναι $j_1 + j_2$. Άρα θα πρέπει να ισχύει:

$$\underbrace{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)}_{4j_1j_2 + 2j_1 + 2j_2 + 1} = \underbrace{2 \overbrace{(j_1 + j_2)}^j + 1}_{2j_1 + 2j_2 + 1}$$

Αυτές οι δύο σχέσεις είναι ίσες μόνο όταν $j_1 = j_2 = 0$.

Άρα ο χώρος Χίλμπερτ της ολικής στροφορμής $\mathcal{H}_{2j_1+1}^{(A)} \otimes \mathcal{H}_{2j_2+1}^{(B)}$ δεν μπορεί να περιγραφεί από έναν άλλο χώρο Χίλμπερτ $\mathcal{H}_{2j+1}^{(AB)}$.

Αφού ξέρουμε πως δεν υπάρχει μόνο μία τιμή για το j , θα πρέπει να υπάρχει ένα σύνολο τιμών:

$$\{j_{\min}, j_{\min} + 1, \dots, j_{\max} - 1, j_{\max}\}$$

Ο νέος χώρος θα πρέπει να έχει διαστάσεις: $\sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} (2j + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$

Άμεσο Άθροισμα Πινάκων

Έστω πως έχουμε δύο πίνακες που τα στοιχεία τους μπορεί να είναι και αυτοί πίνακες

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

Το άμεσο άθροισμα πινάκων είναι ίσο με

$$X \oplus Y = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 & 0 \\ X_{21} & X_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{11} & Y_{12} \\ 0 & 0 & Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{Παράδειγμα: } \left. \begin{array}{l} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ Y = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow X \oplus Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Υποχώροι Χίλμπερτ

Έστω ένας χώρος Χίλμπερτ πεπερασμένων διαστάσεων $\mathcal{H}_d$ και ένας Ερμιτιανός τελεστής $H \in \mathcal{H}_d$. Μια από τις βάσεις αυτού του χώρου είναι τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή $H : \{|h_0\rangle, |h_1\rangle, \dots, |h_{d-1}\rangle\}$, τότε υπάρχει ένας ισομορφικός χώρος Χίλμπερτ που γράφεται ως άμεσο άθροισμα υποχώρων Χίλμπερτ:

$$\mathcal{H}_d \cong \bigoplus_j \mathcal{H}^{(j)}$$

όπου $\mathcal{H}^{(j)} := \text{span}\{|h_j\rangle\}$. Εάν δύο χώροι Χίλμπερτ είναι ισομορφικοί, σημαίνει ότι υπάρχει μια σχέση που αντιστοιχίζει κάθε διάνυσμα του ενός σε ένα μοναδικό διάνυσμα του άλλου, διατηρώντας τα μήκη και τα εσωτερικά γινόμενά τους.

Οι διαστάσεις του χώρου $\bigoplus_j \mathcal{H}^{(j)}$ είναι $\sum_j \dim \mathcal{H}^{(j)}$.

Για παράδειγμα έχουμε: $\left. \begin{array}{l} \{|0\rangle, |1\rangle\} \in \mathcal{H}_2^{(A)} \\ \{|0\rangle, |1\rangle\} \in \mathcal{H}_2^{(B)} \end{array} \right\} \Rightarrow \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\} \in \mathcal{H}_2^{(A)} \otimes \mathcal{H}_2^{(B)} \equiv \mathcal{H}_4^{(AB)}$

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{H}_2^{(1)} := \text{span}\{|00\rangle, |01\rangle\} \\ \mathcal{H}_2^{(2)} := \text{span}\{|10\rangle, |11\rangle\} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{H}_4^{(AB)} \cong \mathcal{H}_2^{(1)} \oplus \mathcal{H}_2^{(2)}$$

Υποχώροι Χίλμπερτ

Διαφορές Χώρων Χίλμπερτ

Ορίζουμε τον χώρο Χίλμπερτ $\bigoplus_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} \mathcal{H}_{2j+1}^{(j)}$, που είναι ισομορφικός με τον $\mathcal{H}_{2j_1+1}^{(A)} \otimes \mathcal{H}_{2j_2+1}^{(B)}$.

Χώρος	Ιδιοκαταστάσεις	Διαστάσεις	Τιμές
$\mathcal{H}_{2j_1+1}^{(A)} \otimes \mathcal{H}_{2j_2+1}^{(B)}$	$\{ j_1, m_1\rangle \otimes j_2, m_2\rangle\}$	$(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$	$j \left\{ \begin{array}{l} m_{\min} = -j \\ \vdots \\ m_{\max} = j \end{array} \right\} 2j + 1$
$\bigoplus_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} \mathcal{H}_{2j+1}^{(j)}$	$\{ j, m\rangle\}$	$\sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} (2j + 1)$	$j^{(i)} \left\{ \begin{array}{l} m_{\min}^{(i)} = -j^{(i)} \\ \vdots \\ m_{\max}^{(i)} = j^{(i)} \end{array} \right\} 2j^{(i)} + 1$ $\downarrow$ $\{j_{\min}, j_{\min} + 1, \dots, j_{\max} - 1, j_{\max}\}$ $\downarrow$ $?$ $\downarrow$ $j_1 + j_2$
$m_{\max,1} + m_{\max,2} = m_{\max} \Rightarrow \boxed{j_1 + j_2 = j_{\max}}$			

Ιδιοκαταστάσεις Ολικής Στροφορμής

Για να βρούμε το $j_{\min}$ ενεργούμε ως εξής.

Ξέρουμε πως $\sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1)$ Όροι αθροίσματος: $j_{\max} - j_{\min} + 1 = j_1 + j_2 + 1 - j_{\min}$

Έχουμε $\sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} (2j+1) = (2j_{\min}+1) + [2(j_{\min}+1)+1] + [2(j_{\min}+2)+1] + \dots + (2j_{\max}+1)$

$$= (2j_{\min}+1) + (2j_{\min}+3) + (2j_{\min}+5) + \dots + (2j_1+2j_2+1)$$

$$= (2j_1+2j_2+1) + (2j_1+2j_2-1) + (2j_1+2j_2-3) + \dots + (2j_{\min}+1)$$

$$= s$$

Προσθέτοντας έχουμε $2s = 2[j_1+j_2+1+j_{\min}] + 2[j_1+j_2+1+j_{\min}] + \dots + 2[j_1+j_2+1+j_{\min}]$

$$= 2[j_1+j_2+1+j_{\min}][j_1+j_2+1-j_{\min}]$$

Δείτε και παράδειγμα 7.2

Και παίρνουμε $s = [(j_1+j_2+1)+j_{\min}][(j_1+j_2+1)-j_{\min}]$

$$\left. \begin{aligned} &= (j_1+j_2+1)^2 - j_{\min}^2 \\ &= (2j_1+1)(2j_2+1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow j_{\min}^2 = (j_1-j_2)^2 \Rightarrow \boxed{j_{\min} = \pm(j_1-j_2) = |j_1-j_2|}$$

Οι υπόλοιπες τιμές j βρίσκονται εύκολα αφού ξέρουμε πως η κάθε μία απέχει από την άλλη μία μονάδα.

Ολικό Σπιν Σωματιδίων με Σπιν 1/2

Σύστημα 1: Σωματίδιο με σπιν 1/2 που έχει τις ιδιοκαταστάσεις:
$$\begin{cases} |z_+\rangle_1 = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_1 = |0\rangle_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ |z_-\rangle_1 = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_1 = |1\rangle_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Σύστημα 2: Σωματίδιο με σπιν 1/2 που έχει τις ιδιοκαταστάσεις:
$$\begin{cases} |z_+\rangle_2 = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_2 = |0\rangle_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ |z_-\rangle_2 = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_2 = |1\rangle_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Για το συνολικό σύστημα έχουμε $s_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ και $s_{\min} = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| = 0$.

Οι ιδιοτιμές του $\vec{S}^2$ είναι $\hbar^2 s(s+1)$ άρα: 0 και $2\hbar^2$. Στην κάθε τιμή s αντιστοιχούν $2s+1$ τιμές m_s άρα και αντίστοιχος αριθμός κοινών ιδιοκαταστάσεων $|s, m_s\rangle$.

Στην τιμή $s_{\max} = 1$ αντιστοιχούν 3 ιδιοκαταστάσεις των $\vec{S}^2$ και S_z για τις οποίες ονομάζουμε triplet και συμβολίζουμε ως:

$$|1, -1\rangle \quad |1, 0\rangle \quad |1, 1\rangle$$

Στην τιμή $s_{\min} = 0$ αντιστοιχεί 1 ιδιοκατάσταση των $\vec{S}^2$ και S_z , την οποία ονομάζουμε singlet και συμβολίζουμε ως:

$$|0, 0\rangle$$

Ολικό Σπιν Σωματιδίων με Σπιν 1/2

$$|s, m_s\rangle = \sum_{m_{s1}=-s_1}^{s_1} \sum_{m_{s2}=-s_2}^{s_2} c_{m_1, m_2} |s_1, m_{s1}\rangle \otimes |s_2, m_{s2}\rangle$$

Για την κατάσταση $|1, 1\rangle$ έχουμε: $s_{\max} = s_1 + s_2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ και $m_s = m_{s1} + m_{s2} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, άρα

$$|1, 1\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |z_+\rangle \otimes |z_+\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$$

Για την κατάσταση $|1, -1\rangle$ έχουμε: $s_{\max} = s_1 + s_2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ και $m_s = m_{s1} + m_{s2} \Rightarrow -1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$, άρα

$$|1, -1\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |z_-\rangle \otimes |z_-\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$$

Ολικό Σπιν Σωματιδίων με Σπιν 1/2

Για την κατάσταση $|1, 0\rangle$ έχουμε: $s_{\max} = s_1 + s_2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ αλλά $m_s = m_{s1} + m_{s2} \Rightarrow 0 = \pm m_{s1} \mp m_{s2} \Rightarrow ?$

Άρα για να βρούμε την κατάσταση μπορούμε να κάνουμε το εξής: $S_- |1, 1\rangle = \hbar \sqrt{1(1+1) - 1(1-1)} |1, 0\rangle = \sqrt{2}\hbar |1, 0\rangle$

$$\begin{aligned} \text{Όπου } S_- |1, 1\rangle &= (S_{1-} \otimes I + I \otimes S_{2-}) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ &= (S_{1-} \otimes I) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + (I \otimes S_{2-}) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \hbar \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \hbar \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \hbar \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \hbar \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \hbar \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \hbar \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{2}\hbar |1, 0\rangle \Leftrightarrow |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-\rangle \otimes |z_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+\rangle \otimes |z_-\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle \otimes |1\rangle \end{aligned}$$

Ολικό Σπιν Σωματιδίων με Σπιν 1/2

Για την κατάσταση $|0, 0\rangle$ έχουμε: $s_{\min} = |s_1 - s_2| \Rightarrow 0 = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right|$ αλλά $m_s = m_{s1} + m_{s2} \Rightarrow 0 = \pm m_{s1} \mp m_{s2} \Rightarrow ?$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } |0, 0\rangle &= a \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + b \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ &= a |z_{-}\rangle \otimes |z_{+}\rangle + b |z_{+}\rangle \otimes |z_{-}\rangle \\ &= a |1\rangle \otimes |0\rangle + b |0\rangle \otimes |1\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε έχουμε } \langle 1, 0 | 0, 0 \rangle &= 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1 | \otimes \langle 0 | + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | \otimes \langle 1 | \right) (a |1\rangle \otimes |0\rangle + b |0\rangle \otimes |1\rangle) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow a = -b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε λόγω κανονικοποίησης: } |a|^2 + |b|^2 = 1 &\Rightarrow |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} |z_{-}\rangle \otimes |z_{+}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |z_{+}\rangle \otimes |z_{-}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \otimes |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle \otimes |1\rangle \end{aligned}$$