

Κβαντομηχανική II

Διάλεξη 12

19 Δεκεμβρίου 2025

Σπύρος Τσέρκης



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

DEMOCRITUS
UNIVERSITY
OF THRACE

Διεμπλοκή (Entanglement)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Σωματίδιο A με σπιν } 1/2: |\psi\rangle^{(A)} = a|0\rangle + b|1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ \text{Σωματίδιο B με σπιν } 1/2: |\psi\rangle^{(B)} = c|0\rangle + d|1\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow |\psi\rangle^{(A)} \otimes |\psi\rangle^{(B)} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix}$$

- Έχοντας δύο κβαντικές καταστάσεις μπορούμε πάντα να βρούμε το τανυστικό γινόμενο τους, το οποίο αντιστοιχεί σε μια διαχωρίσιμη (separable) κατάσταση. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει πάντα.
- Μια κατάσταση δύο σωματιδίων που δεν μπορεί να γραφεί ως ένα τανυστικό γινόμενο δύο καταστάσεων ονομάζεται διεμπλεγμένη (entangled). Με άλλα λόγια η διεμπλεγμένη κατάσταση γράφεται αναγκαστικά ως γραμμικός συνδυασμός τουλάχιστον δύο διαχωρίσιμων καταστάσεων.
- Η διεμπλοκή είναι ένα φαινόμενο που δεν μπορεί να εξηγηθεί με κλασικό τρόπο. Ο Schrödinger είχε αναφέρει χαρακτηριστικά πως είναι το κατεξοχήν γνώρισμα της κβαντομηχανικής το οποίο μας επιβάλλει να απομακρυνθούμε από τον κλασικό τρόπο σκέψης.

Παράδειγμα Διεμπλεγμένων και Διαχωρίσιμων Καταστάσεων

Στο προηγούμενο μάθημα είδαμε τις παρακάτω καταστάσεις για τη σύνθεση στροφορμών δύο σωματιδίων με σπιν 1/2

$$\text{Διαχωρίσιμες καταστάσεις: } |\psi\rangle = |1, 1\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |\psi\rangle = |1, -1\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Διεμπλεγμένες καταστάσεις:

$$|\psi\rangle = |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle = |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \otimes |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Συσχετισμοί για τον Πρώτο Ζεύγος

Έστω πως έχουμε μια διεμπλεγμένη κατάσταση:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \otimes |1\rangle$$

Όταν κάνω μια μέτρηση στην ιδιότητα λ_1 στο Α σωματίδιο και μια μέτρηση στην ιδιότητα λ_1 στο Β σωματίδιο, τότε έχουμε τις εξής πιθανότητες:

Η πιθανότητα να μετρήσουμε $\lambda_0 = 1$ και $\lambda_1 = 1$ είναι:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lambda_0 = 1, \lambda_0 = 1) &= |(\langle +| \otimes \langle +|) |\psi\rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle +| \otimes \langle +|)(|0\rangle \otimes |0\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle +| \otimes \langle +|)(|1\rangle \otimes |1\rangle) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle +|0\rangle \langle +|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle +|1\rangle \langle +|1\rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Συσχετισμοί για τον Πρώτο Ζεύγος

Η πιθανότητα να μετρήσουμε $\lambda_0 = 1$ και $\lambda_1 = -1$ είναι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lambda_0 = 1, \lambda_1 = -1) &= |(\langle + | \otimes \langle - |) |\psi\rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle + | \otimes \langle - |) (|0\rangle \otimes |0\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle + | \otimes \langle - |) (|1\rangle \otimes |1\rangle) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle + | 0 \rangle \langle - | 0 \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle + | 1 \rangle \langle - | 1 \rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Συσχετισμοί για τον Πρώτο Ζεύγος

Η πιθανότητα να μετρήσουμε $\lambda_0 = -1$ και $\lambda_1 = 1$ είναι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lambda_0 = -1, \lambda_1 = 1) &= |(\langle -| \otimes \langle +|) |\psi\rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle -| \otimes \langle +|) (|0\rangle \otimes |0\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle -| \otimes \langle +|) (|1\rangle \otimes |1\rangle) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -|0\rangle \langle +|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -|1\rangle \langle +|1\rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Συσχετισμοί για τον Πρώτο Ζεύγος

Η πιθανότητα να μετρήσουμε $\lambda_0 = -1$ και $\lambda_1 = -1$ είναι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lambda_0 = -1, \lambda_1 = -1) &= |(\langle -| \otimes \langle -|) |\psi\rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle -| \otimes \langle -|) (|0\rangle \otimes |0\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle -| \otimes \langle -|) (|1\rangle \otimes |1\rangle) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -|0\rangle \langle -|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -|1\rangle \langle -|1\rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Άρα μετρώντας και στα δύο σωματίδια την ιδιότητα A_1 έχουμε δύο πιθανότητες:

- με πιθανότητα $1/2$ θα μετρήσω την ιδιοτιμή 1 και στα δύο σωματίδια.
- με πιθανότητα $1/2$ θα μετρήσω την ιδιοτιμή -1 και στα δύο σωματίδια.

Αυτό σημαίνει πως οι ιδιότητες είναι συσχετισμένες. Με άλλα λόγια, μετρώντας την ιδιοτιμή στο ένα σωματίδιο μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια την ιδιοτιμή στο άλλο σωματίδιο.

Συσχετισμοί για τον Δεύτερο Ζεύγος

Όταν κάνω μια μέτρηση στην ιδιότητα Λ_2 στο Α σωματίδιο και μια μέτρηση στην ιδιότητα Λ_2 στο Β σωματίδιο, τότε έχουμε τις εξής πιθανότητες:

Η πιθανότητα να μετρήσουμε $\lambda_0 = 1$ και $\lambda_1 = 1$ είναι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lambda_0 = 1, \lambda_0 = 1) &= |(\langle +\imath | \otimes \langle +\imath |) |\psi\rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle +\imath | \otimes \langle +\imath |)(|0\rangle \otimes |0\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle +\imath | \otimes \langle +\imath |)(|1\rangle \otimes |1\rangle) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle +\imath | 0 \rangle \langle +\imath | 0 \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle +\imath | 1 \rangle \langle +\imath | 1 \rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{\imath}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{\imath}{\sqrt{2}}\right) \right|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Συσχετισμοί για τον Δεύτερο Ζεύγος

Η πιθανότητα να μετρήσουμε $\lambda_0 = 1$ και $\lambda_1 = -1$ είναι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lambda_0 = 1, \lambda_1 = -1) &= |(\langle +z| \otimes \langle -z|) |\psi\rangle|^2 \\&= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle +z| \otimes \langle -z|)(|0\rangle \otimes |0\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle +z| \otimes \langle -z|)(|1\rangle \otimes |1\rangle) \right|^2 \\&= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle +z|0\rangle \langle -z|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle +z|1\rangle \langle -z|1\rangle \right|^2 \\&= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} \right|^2 \\&= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Συσχετισμοί για τον Δεύτερο Ζεύγος

Η πιθανότητα να μετρήσουμε $\lambda_0 = -1$ και $\lambda_1 = 1$ είναι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lambda_0 = -1, \lambda_1 = 1) &= |(\langle -z| \otimes \langle +z|) |\psi\rangle|^2 \\&= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle -z| \otimes \langle +z|) (|0\rangle \otimes |0\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle -z| \otimes \langle +z|) (|1\rangle \otimes |1\rangle) \right|^2 \\&= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -z|0\rangle \langle +z|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -z|1\rangle \langle +z|1\rangle \right|^2 \\&= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) \right|^2 \\&= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Συσχετισμοί για τον Δεύτερο Ζεύγος

Η πιθανότητα να μετρήσουμε $\lambda_0 = -1$ και $\lambda_1 = -1$ είναι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lambda_0 = -1, \lambda_1 = -1) &= |(\langle -i| \otimes \langle -i|) |\psi\rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle -i| \otimes \langle -i|) (|0\rangle \otimes |0\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle -i| \otimes \langle -i|) (|1\rangle \otimes |1\rangle) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -i|0\rangle \langle -i|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -i|1\rangle \langle -i|1\rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} \right|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Άρα μετρώντας και στα δύο σωματίδια την ιδιότητα L_2 έχουμε δύο πιθανότητες:

- με πιθανότητα $1/2$ θα μετρήσω την ιδιοτιμή 1 στο ένα σωματίδιο και την ιδιοτιμή -1 στο άλλο.
- με πιθανότητα $1/2$ θα μετρήσω την ιδιοτιμή -1 στο ένα σωματίδιο και την ιδιοτιμή 1 στο άλλο.

Άρα οι ιδιότητες είναι συσχετισμένες.

Συσχετισμοί για τον Τρίτο Ζεύγος

Όταν κάνω μια μέτρηση στην ιδιότητα Λ_3 στο Α σωματίδιο και μια μέτρηση στην ιδιότητα Λ_3 στο Β σωματίδιο, τότε έχουμε τις εξής πιθανότητες:

Η πιθανότητα να μετρήσουμε $\lambda_0 = 1$ και $\lambda_1 = 1$ είναι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lambda_0 = 1, \lambda_0 = 1) &= |(\langle 0| \otimes \langle 0|) |\psi\rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 0| \otimes \langle 0|) (|0\rangle \otimes |0\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 0| \otimes \langle 0|) (|1\rangle \otimes |1\rangle) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0|0\rangle \langle 0|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0|1\rangle \langle 0|1\rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 \cdot 0 \right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Συσχετισμοί για τον Τρίτο Ζεύγος

Η πιθανότητα να μετρήσουμε $\lambda_0 = 1$ και $\lambda_1 = -1$ είναι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lambda_0 = 1, \lambda_1 = -1) &= |(\langle 0| \otimes \langle 1|) |\psi\rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 0| \otimes \langle 1|)(|0\rangle \otimes |0\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 0| \otimes \langle 1|)(|1\rangle \otimes |1\rangle) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0|0\rangle \langle 1|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0|1\rangle \langle 1|1\rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 \cdot 1 \right|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Συσχετισμοί για τον Τρίτο Ζεύγος

Η πιθανότητα να μετρήσουμε $\lambda_0 = -1$ και $\lambda_1 = 1$ είναι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lambda_1 = -1, \lambda_0 = 0) &= |(\langle 1| \otimes \langle 0|) |\psi\rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 1| \otimes \langle 0|)(|0\rangle \otimes |0\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 1| \otimes \langle 0|)(|1\rangle \otimes |1\rangle) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1|0\rangle \langle 0|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1|1\rangle \langle 0|1\rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot 0 \right|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Συσχετισμοί για τον Τρίτο Ζεύγος

Η πιθανότητα να μετρήσουμε $\lambda_0 = -1$ και $\lambda_1 = -1$ είναι:

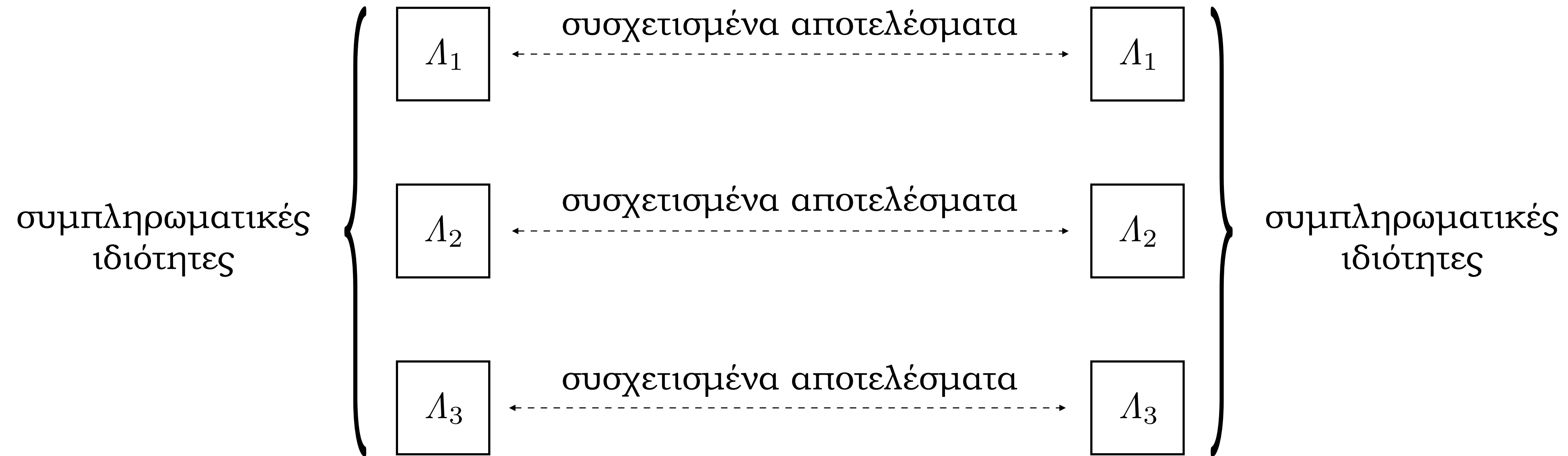
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lambda_0 = -1, \lambda_1 = -1) &= |(\langle 1| \otimes \langle 1|) |\psi\rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 1| \otimes \langle 1|)(|0\rangle \otimes |0\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 1| \otimes \langle 1|)(|1\rangle \otimes |1\rangle) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1|0\rangle \langle 1|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1|1\rangle \langle 1|1\rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot 1 \right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Άρα μετρώντας και στα δύο σωματίδια την ιδιότητα A_1 έχουμε δύο πιθανότητες:

- με πιθανότητα $1/2$ θα μετρήσω την ιδιοτιμή 1 και στα δύο σωματίδια.
- με πιθανότητα $1/2$ θα μετρήσω την ιδιοτιμή -1 και στα δύο σωματίδια.

Άρα οι ιδιότητες είναι συσχετισμένες.

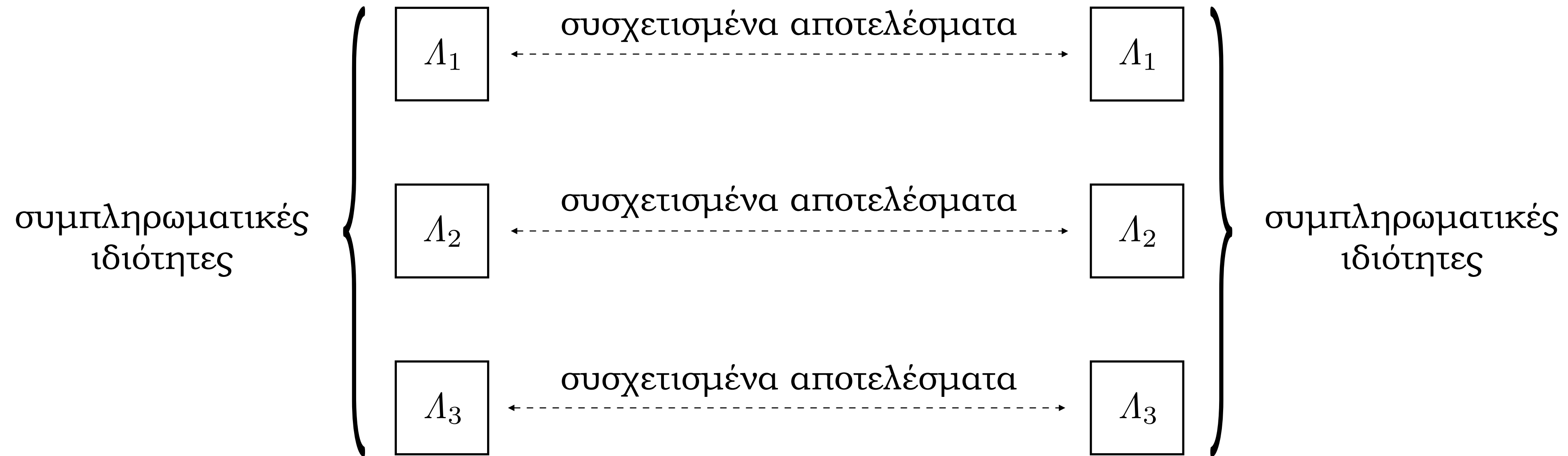
Διεμπλοκή και Κβαντικοί Συσχετισμοί



Σύστημα σωματιδίων με κατάσταση: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \otimes |1\rangle$

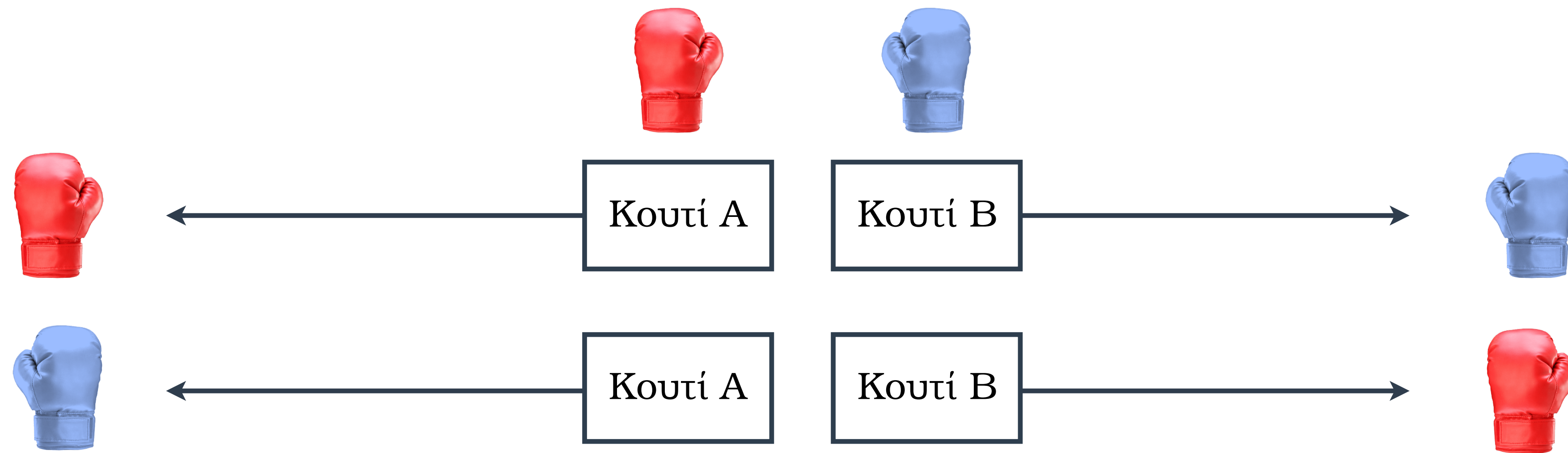
- Το ποια ζεύγη ιδιοτήτων είναι μεταξύ τους συσχετισμένα έχει να κάνει με την κβαντική κατάσταση.
- Τα δύο σωματίδια μπορούν να είναι διεμπλεγμένα ασχέτους του πόσο μακριά είναι το ένα από το άλλο.

Διεμπλοκή και Κβαντικοί Συσχετισμοί



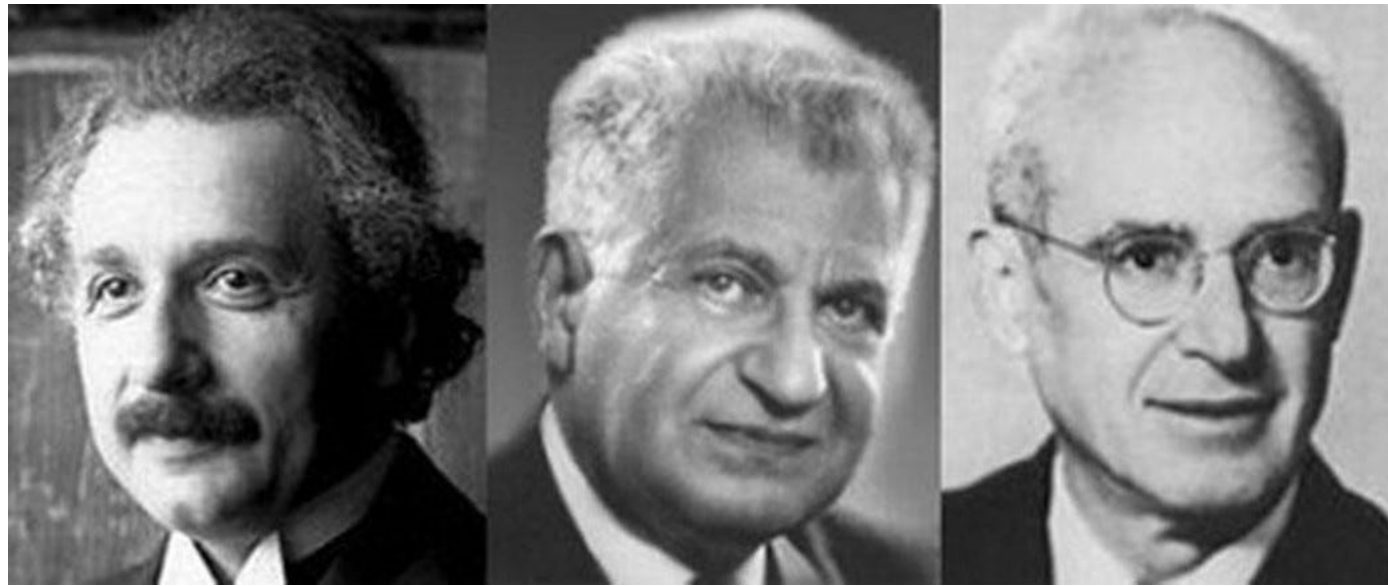
- Ενώ η μέτρηση μιας ιδιότητας ενός διεμπλεγμένου σωματιδίου είναι πιθανοκρατική, εφόσον ένας ζεύγος ιδιοτήτων είναι συσχετισμένες μεταξύ τους, μπορώ να προβλέψω τη μία μέσω της μέτρησης της άλλης.
- Όταν δύο σωματίδια είναι διεμπλεγμένα τότε ζεύγη ιδιοτήτων είναι συσχετισμένα μεταξύ τους (δηλαδή οι ιδιοτιμές τους), όπου οι ιδιότητες των ζευγών για κάθε σωματίδιο είναι μεταξύ τους συμπληρωματικές.
- Όταν δύο ιδιότητες είναι συμπληρωματικές τότε σίγουρα είναι μη συμβατές μεταξύ τους αφού δεν μετατίθενται και άρα δεν μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα.

Κλασικοί Συσχετισμοί



- Εάν βρούμε στο κουτί Α το αριστερό γάντι ξέρουμε πως στο κουτί Β είναι το δεξί, και αντίστροφα, άρα αυτές οι ιδιότητες είναι συσχετισμένες.
- Εάν βρούμε στο κουτί Α το κόκκινο γάντι ξέρουμε πως στο κουτί Β είναι το μπλε, και αντίστροφα, άρα αυτές οι ιδιότητες είναι συσχετισμένες.
- Στην κλασική φυσική μπορούμε να έχουμε ζεύγη συσχετισμένων ιδιοτήτων αλλά οι ιδιότητες των ζευγών για κάθε σύστημα μεμονωμένα μετατίθενται μεταξύ τους, άρα στην πράξη είναι ο ίδιος συσχετισμός αφού από τη γνώση της μίας ιδιότητας μπορώ να προβλέψω τι συμβαίνει στο άλλο σύστημα και για τις δύο ιδιότητες.

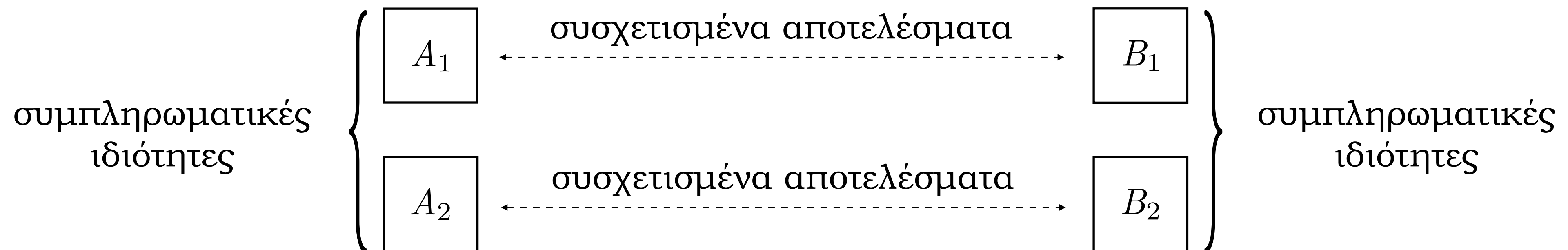
Παράδοξο EPR



Κριτήριο Πραγματικότητας:

“Εάν, χωρίς να διαταράξουμε ένα σύστημα, μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα την τιμή μιας φυσικής ποσότητας, τότε υπάρχει ένα στοιχείο φυσικής πραγματικότητας που αντιστοιχεί σε αυτήν τη φυσική ποσότητα.”

- Έστω πως έχουμε ένα διεμπλεγμένο σύστημα σωματιδίων, τα οποία είναι απομακρυσμένα το ένα με το άλλο.
- Άρα θα υπάρχουν δύο συμπληρωματικές ιδιότητες στο πρώτο σωματίδιο A_1 και A_2 που θα είναι συσχετισμένες με δύο συμπληρωματικές ιδιότητες από το δεύτερο σωματίδιο B_1 και B_2 .



Παράδοξο EPR

- Οι συμπληρωματικές ιδιότητες είναι μη συμβατές, πχ δύο πίνακες Pauli, άρα δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τις τιμές τους ταυτόχρονα λόγω της αρχής της απροσδιοριστίας.
- Μπορούμε να μετρήσουμε μια ιδιότητα A_1 του πρώτου σωματιδίου και λόγω του συσχετισμού να μάθουμε την τιμή της ιδιότητας B_1 του δεύτερου χωρίς να διαταράζουμε το δεύτερο σωματίδιο.
- Αντίστοιχα, θα μπορούσαμε να είχαμε μετρήσει μια άλλη ιδιότητα A_2 του πρώτου σωματιδίου και λόγω συσχετισμού να μάθουμε την τιμή της ιδιότητας B_2 του δεύτερου χωρίς να διαταράζουμε το δεύτερο σωματίδιο.
- Άρα θα μπορούσαμε εν γένει να μάθουμε με βεβαιότητα τις τιμές των ιδιοτήτων B_1 και B_2 χωρίς να διαταράζουμε το σύστημα B, πράγμα που έρχεται σε κόντρα με το γεγονός πως αυτές οι ιδιότητες είναι συμπληρωματικές.
- Το συμπέρασμά των EPR ήταν πως αυτή η ασυνέπεια δείχνει πως η κβαντομηχανική είναι μια ημιτελής θεωρία, το οποίο είναι ακόμα και σήμερα ένα ανοιχτό θέμα συζήτησης.
- Ενώ είναι άγνωστος ο μηχανισμός της φύσης που δημιουργεί και διατηρεί αυτούς τους συσχετισμούς, γνωρίζουμε πως είναι αδύνατον να χρησιμοποιηθούν για επικοινωνία πιο γρήγορη από την ταχύτητα του φωτός.

Η Απάντηση του Bohr στο Παράδοξο EPR

- Η απάντηση του Bohr ήταν πως το επιχείρημα των EPR είναι λάθος διότι εφόσον οι συμπληρωματικές ιδιότητες είναι ασύμβατες μεταξύ τους δεν μπορούμε να μετρήσουμε ταυτόχρονα τις τιμές τους και άρα δεν έχουμε δικαίωμα να κάνουμε καμία πρόβλεψη για το ποια θα ήταν η τιμή της μίας ενώ μετρήθηκε η άλλη.
- Με άλλα λόγια, το επιχείρημα των EPR υπονοεί πως ενώ μετράμε μια ιδιότητα, μπορούμε να κάνουμε υποθέσεις για το αποτέλεσμα της συμπληρωματικής της, ενώ δεν υπάρχει τρόπος να επιβεβαιώσουμε ή να διαψεύσουμε αυτήν την πρόβλεψη.
- Αν θεωρήσουμε (όπως οι EPR) πως οι τιμές των ιδιοτήτων υπάρχουν πριν τη μέτρηση, η αδυναμία πρόβλεψης είναι πρόβλημα της τωρινής θεωρίας, άρα ίσως να υπάρχει μια πιο γενική θεωρία (που ίσως να έχει και άλλες μεταβλητές που μας είναι προς το παρόν κρυφές) η οποία να έδινε απάντηση σε αυτό το πρόβλημα.
- Αν όμως θεωρήσουμε (όπως ο Bohr) πως η συζήτηση περί τιμών ιδιοτήτων που δεν μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα δεν έχει νόημα, τότε η τωρινή θεωρία δεν είναι ημιτελής απλά είναι αυστηρά στατιστικής φύσης.
- Υπάρχουν πολλές υποθέσεις για το τι ακριβώς συμβαίνει, αλλά αυτό είναι ένα φιλοσοφικό ζήτημα που ξεφεύγει από τα πλαίσια του μαθήματος.