

Κβαντομηχανική II

Διάλεξη 13

9 Ιανουαρίου 2025

Σπύρος Τσέρκης

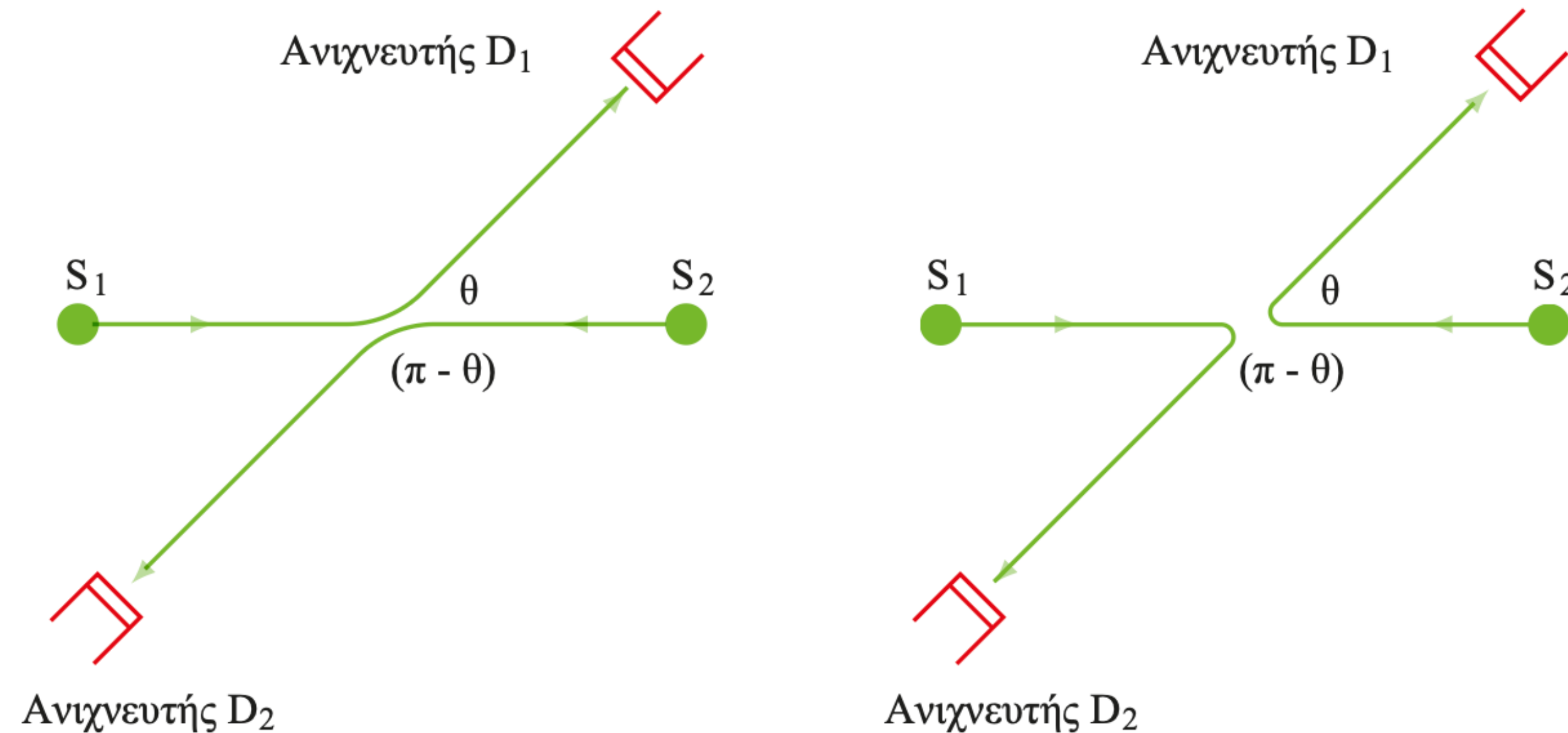


ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

DEMOCRITUS
UNIVERSITY
OF THRACE

Ταυτοτικά Σωματίδια

Ονομάζουμε ταυτοτικά τα σωματίδια εκείνα για τα οποία δεν υπάρχει κανένα φυσικά παρατηρήσιμο μέγεθος που να επιτρέπει την ατομική τους διάκριση. Για παράδειγμα τα ηλεκτρόνια είναι ταυτοτικά σωματίδια.



Εικόνα από το βιβλίο του Zettili

Όταν σκεδάζονται δύο ταυτοτικά σωματίδια είναι αδύνατο να προβλεφθεί με βεβαιότητα αν τα σωματίδια σκεδάζονται σύμφωνα με την πρώτη διαδικασία είτε με την δεύτερη.

Τελεστής Ανταλλαγής Σωματιδίων

Έστω ότι περιγράφουμε ένα σύστημα δύο ταυτοτικών σωματιδίων. Επειδή τα σωματίδια δεν μπορούν να διακριθούν η φυσική κατάσταση του συστήματος πρέπει να είναι αμετάβλητη υπό ανταλλαγή των σωματιδίων. Με άλλα λόγια, οι δύο καταστάσεις θα πρέπει να διαφέρουν κατά μία ολική φάση

$$E |\psi\rangle = |\psi'\rangle = e^{i\varphi} |\psi\rangle$$

όπου ο τελεστής ανταλλαγής ορίζεται ως

$$E(|a\rangle \otimes |b\rangle) = E|a, b\rangle = |b\rangle \otimes |a\rangle = |b, a\rangle$$

Εάν επιδράσουμε με τον τελεστή ανταλλαγής ακόμα μία φορά θα πρέπει να επιστρέψουμε στην αρχική κατάσταση

$$E |\psi'\rangle = |\psi\rangle \Rightarrow E^2 |\psi\rangle = e^{i2\varphi} |\psi\rangle = |\psi\rangle \Rightarrow e^{i2\varphi} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = \pi \end{cases} \Rightarrow E |\psi\rangle = \pm |\psi\rangle$$

Άρα ο τελεστής ανταλλαγής έχει ιδιοτιμές 1 και -1.

Συμμετρικές και Αντι-Συμμετρικές Καταστάσεις

Ο τελεστής ανταλλαγής ως πίνακας για την βάση $\{|a, b\rangle, |b, a\rangle\}$ γράφεται ως εξής

$$E = \begin{bmatrix} \langle a, b | E | a, b \rangle & \langle a, b | E | b, a \rangle \\ \langle b, a | E | a, b \rangle & \langle b, a | E | b, a \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Τα ιδιοδιανύσματα αυτού του πίνακα είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases} \Rightarrow |\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |a, b\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |b, a\rangle \quad \text{συμμετρική κατάσταση}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow |\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |a, b\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |b, a\rangle \quad \text{αντι-συμμετρική κατάσταση}$$

Δύο ταυτοτικά σωματίδια περιγράφονται είτε από μια συμμετρική ή μια αντι-συμμετρική κατάσταση.

Η κατάσταση δύο ταυτοτικών σωματιδίων δεν μπορεί να περιγραφεί ως μια υπέρθεση της συμμετρικής και της αντι-συμμετρικής κυματοσυνάρτησης (Απόδειξη στο Πρόβλημα 9 από Ομάδα Ασκήσεων 4).

Φερμιόνια και Μποζόνια — Απαγορευτική αρχή του Pauli

- Σωματίδια με ακέραιο σπιν ονομάζονται μποζόνια (φωτόνια, πόνια, σωματίδια άλφα). Η συνολική κβαντική κατάσταση συστήματος μποζονίων είναι συμμετρική ως προς την ανταλλαγή των σωματιδίων.
- Σωματίδια με ημιακέραιο σπιν ονομάζονται φερμιόνια (κουάρκ, ηλεκτρόνια, ποζιτρόνια, πρωτόνια, νετρόνια). Η συνολική κβαντική κατάσταση συστήματος φερμιονίων είναι αντισυμμετρική ως προς την ανταλλαγή των σωματιδίων.

Έστω πως δύο μποζόνια είναι στην ίδια κατάσταση:

$$|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |a, a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |a, a\rangle = \sqrt{2} |a, a\rangle \rightarrow |a, a\rangle = |a\rangle \otimes |a\rangle$$

Έστω πως δύο φερμιόνια είναι στην ίδια κατάσταση:

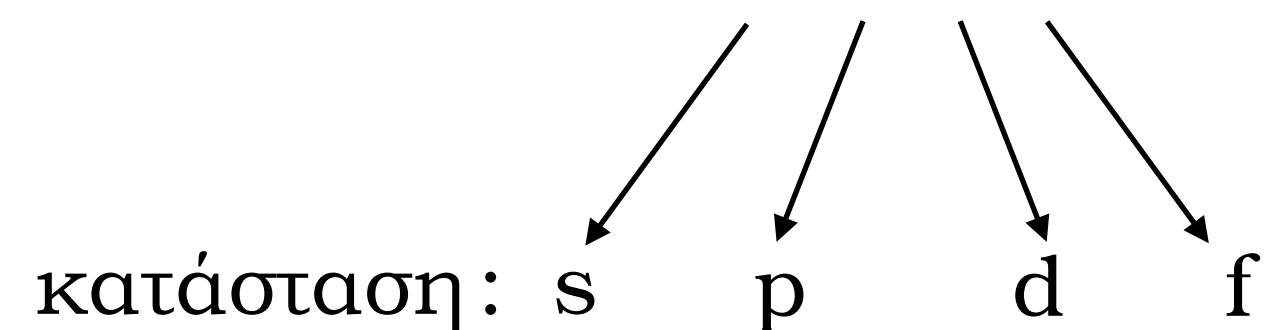
$$|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |a, a\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |a, a\rangle = 0$$

Άρα δύο φερμιόνια δεν μπορούν να έχουν την ίδια κατάσταση, δηλαδή να έχουν τους ίδιους κβαντικούς αριθμούς: n, ℓ, m_ℓ, m_s . Κάθε κατάσταση ενός σωματιδίου μπορεί να καταληφθεί το πολύ από ένα φερμιόνιο. Αυτή είναι η λεγόμενη απαγορευτική αρχή του Pauli.

Δείτε και παράδειγμα 8.3

Δομή Φλοιών και Τροχιακά

- Κάθε άτομο έχει έναν αριθμό από κύριους φλοιούς που καθορίζονται από τον κύριο κβαντικό αριθμό n .
- Κάθε φλοιός n έχει n υποφλοιούς που αντιστοιχούν στα: $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$



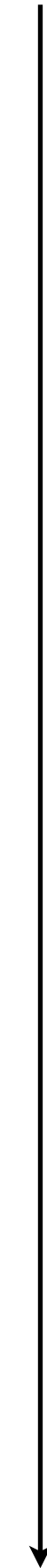
- Κάθε υποφλοιός έχει $2\ell + 1$ υπο-υποφλοιούς που αντιστοιχούν στα: $m_\ell = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell$
- Ένα τροχιακό καθορίζεται από τους τρεις κβαντικούς αριθμούς: $|n, \ell, m\rangle$
- Κάθε τροχιακό, λόγω της απαγορευτικής αρχής του Pauli, έχει το πολύ δύο ηλεκτρόνια: $m_s = \pm \frac{1}{2}$
- Κάθε κατάσταση $|n, \ell\rangle$ μπορεί να φιλοξενήσει το πολύ $2(2\ell + 1)$ ηλεκτρόνια.
- Για ένα άτομο στη θεμελιώδη κατάσταση, τα ηλεκτρόνια γεμίζουν τα τροχιακά κατά σειρά αύξησης της ενέργειας, γνωστό και ως κανόνας Aufbau.

Ηλεκτρονική Διαμόρφωση

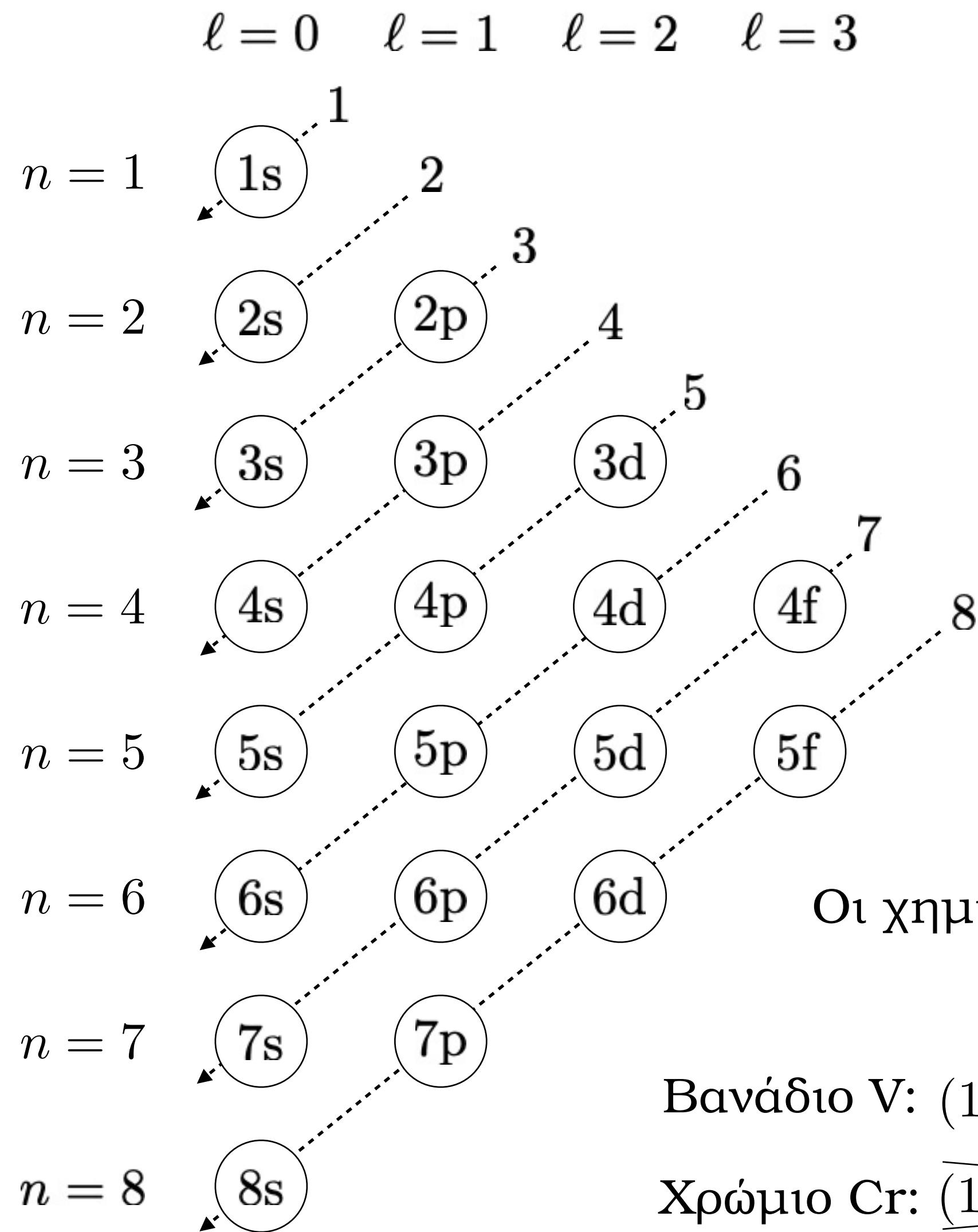
([φλοιός με νούμερο][υποφλοιός με γράμμα])^[αριθμός ηλεκτρονίων σθένους]

$(1s)^1 : n = 1, \ell = 0, 1e$	→	Υδρογόνο H
$(1s)^2 : n = 1, \ell = 0, 2e$	→	Ήλιο He
$(1s)^2(2s)^1 : n = 2, \ell = 0, 1e$	→	Λίθιο Li
$(1s)^2(2s)^2 : n = 2, \ell = 0, 2e$	→	Βηρύλλιο Be
$(1s)^2(2s)^2(2p)^1 : n = 2, \ell = 1, 1e$	→	Βόριο B
$(1s)^2(2s)^2(2p)^2 : n = 2, \ell = 1, 2e$	→	Άνθρακας C
$(1s)^2(2s)^2(2p)^3 : n = 2, \ell = 1, 3e$	→	Άζωτο N
$(1s)^2(2s)^2(2p)^4 : n = 2, \ell = 1, 4e$	→	Οξυγόνο O
$(1s)^2(2s)^2(2p)^5 : n = 2, \ell = 1, 5e$	→	Φθόριο F
$(1s)^2(2s)^2(2p)^6 : n = 2, \ell = 1, 6e$	→	Νέον Ne

Ενέργεια



Κανόνας Madelung — Περιοδικός Πίνακας



1A																	8A	
1s																	1s	
2s																	2p	
3s																	3p	
4s	3B	4B	5B	6B	7B	8B		1B	2B							4p		
5s										4d							5p	
6s										5d							6p	
7s										6d							7p	
																		4f
																		5f