

Κβαντομηχανική II

Διάλεξη 2

10 Οκτωβρίου 2025

Σπύρος Τσέρκης



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

DEMOCRITUS
UNIVERSITY
OF THRACE

Μετατροπές Πινάκων

$$X = \sum_{i,j=0}^{d-1} x_{ij} |e_i\rangle\langle e_j|$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -3i & 4 \end{bmatrix}$$

Ανάστροφος

$$X^{\top} = \sum_{i,j=0}^{d-1} x_{ij} |e_j\rangle\langle e_i|$$

$$\begin{aligned} (\lambda X + \kappa Y)^{\top} &= \lambda X^{\top} + \kappa Y^{\top} \\ (XY)^{\top} &= Y^{\top} X^{\top} \end{aligned}$$

$$A^{\top} = \begin{bmatrix} 1 & -3i \\ 2i & 4 \end{bmatrix}$$

Μιγαδικός Συζυγής

$$X^* = \sum_{i,j=0}^{d-1} x_{ij}^* |e_i\rangle\langle e_j|$$

$$\begin{aligned} (\lambda X + \kappa Y)^* &= \lambda^* X^* + \kappa^* Y^* \\ (XY)^* &= X^* Y^* \end{aligned}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ 3i & 4 \end{bmatrix}$$

Ερμιτιανός Συζυγής
(dagger)

$$X^{\dagger} = \sum_{i,j=0}^{d-1} x_{ij}^* |e_j\rangle\langle e_i|$$

$$\begin{aligned} (\lambda X + \kappa Y)^{\dagger} &= \lambda^* X^{\dagger} + \kappa^* Y^{\dagger} \\ (XY)^{\dagger} &= Y^{\dagger} X^{\dagger} \\ (|x\rangle\langle y|)^{\dagger} &= |y\rangle\langle x| \end{aligned}$$

$$A^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 3i \\ -2i & 4 \end{bmatrix}$$

Γινόμενο και Μεταθέτες Πινάκων

Γινόμενο πινάκων:

$$\begin{aligned} XY &= \sum_{i,j=0}^{d-1} |e_i\rangle\langle e_i| XY |e_j\rangle\langle e_j| \\ &= \sum_{i,j=0}^{d-1} \langle e_i| XY |e_j\rangle |e_i\rangle\langle e_j| \\ &= \sum_{i,j,k=0}^{d-1} \langle e_i| X |e_k\rangle\langle e_k| Y |e_j\rangle |e_i\rangle\langle e_j| \\ &= \sum_{i,j,k=0}^{d-1} x_{ik} y_{kj} |e_i\rangle\langle e_j| \end{aligned}$$

Δείτε και πρόβλημα 2.2

- Μεταθέτης: $[X, Y]_- = XY - YX$

οι πίνακες μετατίθενται όταν $[X, Y]_- = 0$

Ιδιότητες: $[X, Y]_- = -[Y, X]_-$

$$[X, Y]_-^\dagger = [Y^\dagger, X^\dagger]_-$$

$$[X, Y + Z]_- = [X, Y]_- + [X, Z]_-$$

$$[X, YZ]_- = [X, Y]_- Z + Y [X, Z]_-$$

$$[XY, Z]_- = X [Y, Z]_- + [X, Z]_- Y$$

Δείτε και παράδειγμα 2.9(β)

- Αντι-μεταθέτης: $[X, Y]_+ = XY + YX$

οι πίνακες αντι-μετατίθενται όταν $[X, Y]_+ = 0$

Ορίζουσα Πίνακας

Ορίζουσα πίνακα: $\det \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$

$$\det \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = x_{11} \det \begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} - x_{12} \det \begin{bmatrix} x_{21} & x_{23} \\ x_{31} & x_{33} \end{bmatrix} + x_{13} \det \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες: $\det(X^*) = \det(X)^*$

$$\det(X) = \det(X^\top)$$

$$\det(X^\dagger) = \det(X)^*$$

$$\det(kX) = k^d \det(X) \quad \text{όπου } d \text{ οι διαστάσεις του πίνακα}$$

Ίχνος Πίνακα

Ίχνος πίνακα: $\text{tr}(X) = \sum_{i=0}^{d-1} \langle e_i | X | e_i \rangle = \sum_{i=0}^{d-1} x_{ii}$

$$\text{tr} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \right) = 1 + 5 + 9 = 15$$

Ιδιότητες: $\text{tr}(X) = \text{tr}(X^\top)$

$$\text{tr}(X^\dagger) = (\text{tr}(X))^*$$

$$\text{tr}(\lambda X + \kappa Y) = \lambda \text{tr}(X) + \kappa \text{tr}(Y)$$

$$\text{tr}(XYZ) = \text{tr}(ZXY) = \text{tr}(YZX)$$

$$\text{tr}([X, Y]_-) = 0$$

Δείτε και παραδείγματα 2.16 και 2.20

Δείτε και πρόβλημα 2.1(γ)

Εσωτερικό Γινόμενο: $\text{tr}(|x\rangle\langle y|) = \sum_{i=0}^{d-1} \langle e_i | x \rangle \langle y | e_i \rangle$

$$= \sum_{i=0}^{d-1} \langle y | e_i \rangle \langle e_i | x \rangle$$
$$= \langle y | x \rangle$$

Βασικά Ήδη Πινάκων

Ένας πίνακας ονομάζεται διαγώνιος όταν: $X = \begin{bmatrix} \star & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \star & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \star \end{bmatrix}$

Ένας πίνακας ονομάζεται τετραγωνικός όταν έχει ίσο αριθμό γραμμών και στηλών. Αλλιώς ονομάζεται ορθογώνιος.

Ένας πίνακας ονομάζεται κανονικός όταν: $N^\dagger N = NN^\dagger$

Σχόλιο: Όλοι οι πίνακες που μας ενδιαφέρουν σε αυτό το μάθημα θα είναι τετραγωνικοί και κανονικοί.

Ο αντίστροφος ενός πίνακα υπάρχει μόνο για τετραγωνικούς πίνακες με μη-μηδενική ορίζουσα, όπου:

$$XX^{-1} = X^{-1}X = I$$

Δείτε και παράδειγμα 2.13

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα ορίζονται από την εξίσωση: $X |y\rangle = \lambda |y\rangle$

ιδιοτιμή

ιδιοδιάνυσμα (δεν είναι μοναδικά)

Οι ιδιοτιμές είναι οι λύσεις της εξίσωσης: $\det(X - \lambda I) = 0$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Δείτε και παραδείγματα 2.13 και 2.21

Έχνος και ορίζουσα μέσω ιδιοτιμών: $\text{tr}(X) = \sum_i \lambda_i$ $\det(X) = \prod_i \lambda_i$

Για έναν κανονικό πίνακα η φασματική αποσύνθεση είναι: $N = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$

ιδιοτιμή

ιδιοδιάνυσμα

$$N^{-1} = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{\lambda_i} |e_i\rangle\langle e_i|$$

Συνάρτηση κανονικού πίνακα: $f(N) = \sum_{i=0}^{d-1} f(\lambda_i) |e_i\rangle\langle e_i|$

Μοναδιακός Τελεστής

- Ένας τελεστής ονομάζεται μοναδιακός όταν:

$$U^\dagger = U^{-1} \quad \text{όπου} \quad U = \sum_{i=0}^{d-1} e^{i\varphi_i} |e_i\rangle\langle e_i| \quad \text{με} \quad \varphi_i \in \mathbb{R}$$

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I$$

Δείτε και πρόβλημα 2.8

Μια βάση μετατρέπεται σε άλλη βάση μέσω ενός μοναδιακού μετασχηματισμού

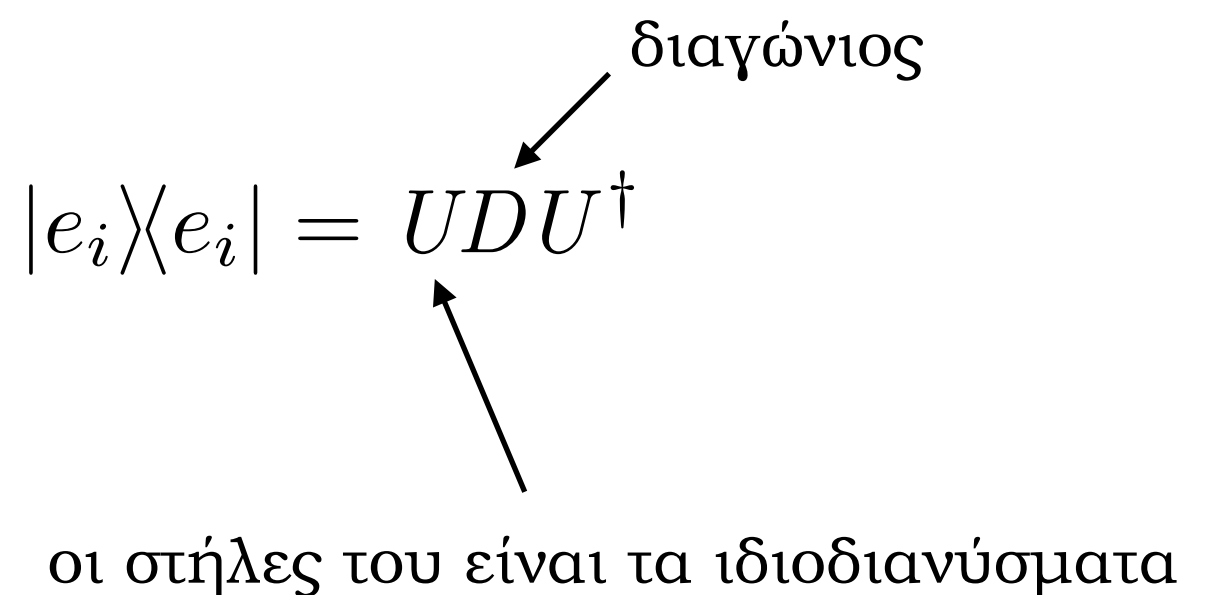
$$\begin{aligned} |e_i\rangle &= \sum_j |h_j\rangle \langle h_j|e_i\rangle \\ &= \sum_j \langle h_j|e_i\rangle |h_j\rangle \\ &= \sum_j U_{ji} |h_j\rangle \end{aligned}$$

$$U = \begin{bmatrix} \langle h_0|e_0\rangle & \langle h_0|e_1\rangle & \langle h_0|e_2\rangle \\ \langle h_1|e_0\rangle & \langle h_1|e_1\rangle & \langle h_1|e_2\rangle \\ \langle h_2|e_0\rangle & \langle h_2|e_1\rangle & \langle h_2|e_2\rangle \end{bmatrix}$$

Δείτε και παράδειγμα 2.18

Η φασματική αποσύνθεση ενός κανονικού πίνακα δίνεται από: $N = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i| = UDU^\dagger$

Δείτε και πρόβλημα 2.10


 διαγώνιος
 οι στήλες του είναι τα ιδιοδιανύσματα

Άλλα Είδη Κανονικών Τελεστών

- Ένας τελεστής ονομάζεται Ερμιτιανός όταν: $H^\dagger = H$ όπου $H = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$ με $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Δείτε και παράδειγμα 2.7(α)

- Ένας τελεστής ονομάζεται θετικός όταν: $P \geq 0$ όπου $P = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$ με $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$

- Ένας τελεστής ονομάζεται προβολικός όταν: $\Pi = \Pi^2$ όπου $\Pi = \sum_{i=0}^{k-1} |e_i\rangle\langle e_i|$ με $k < d$

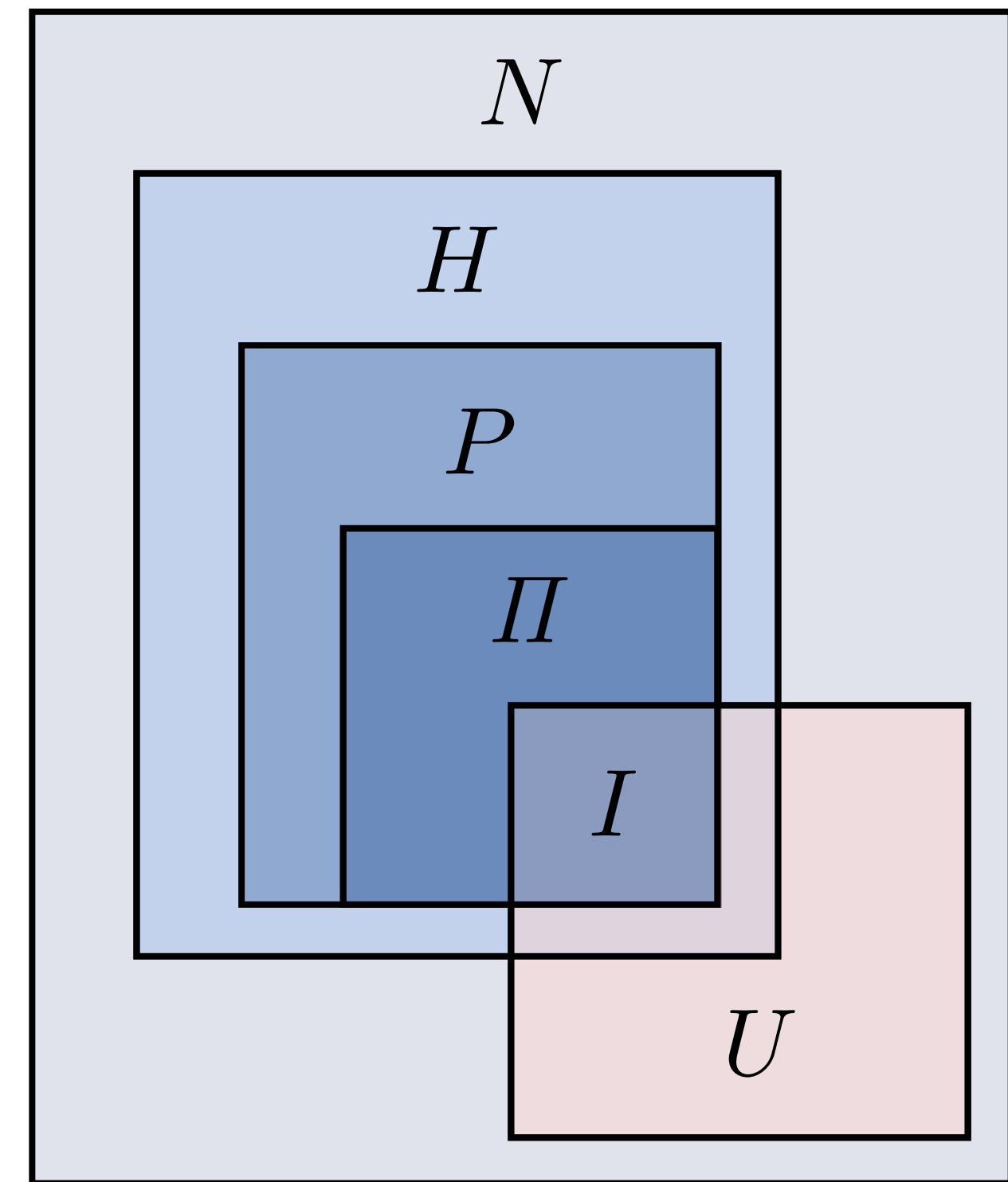
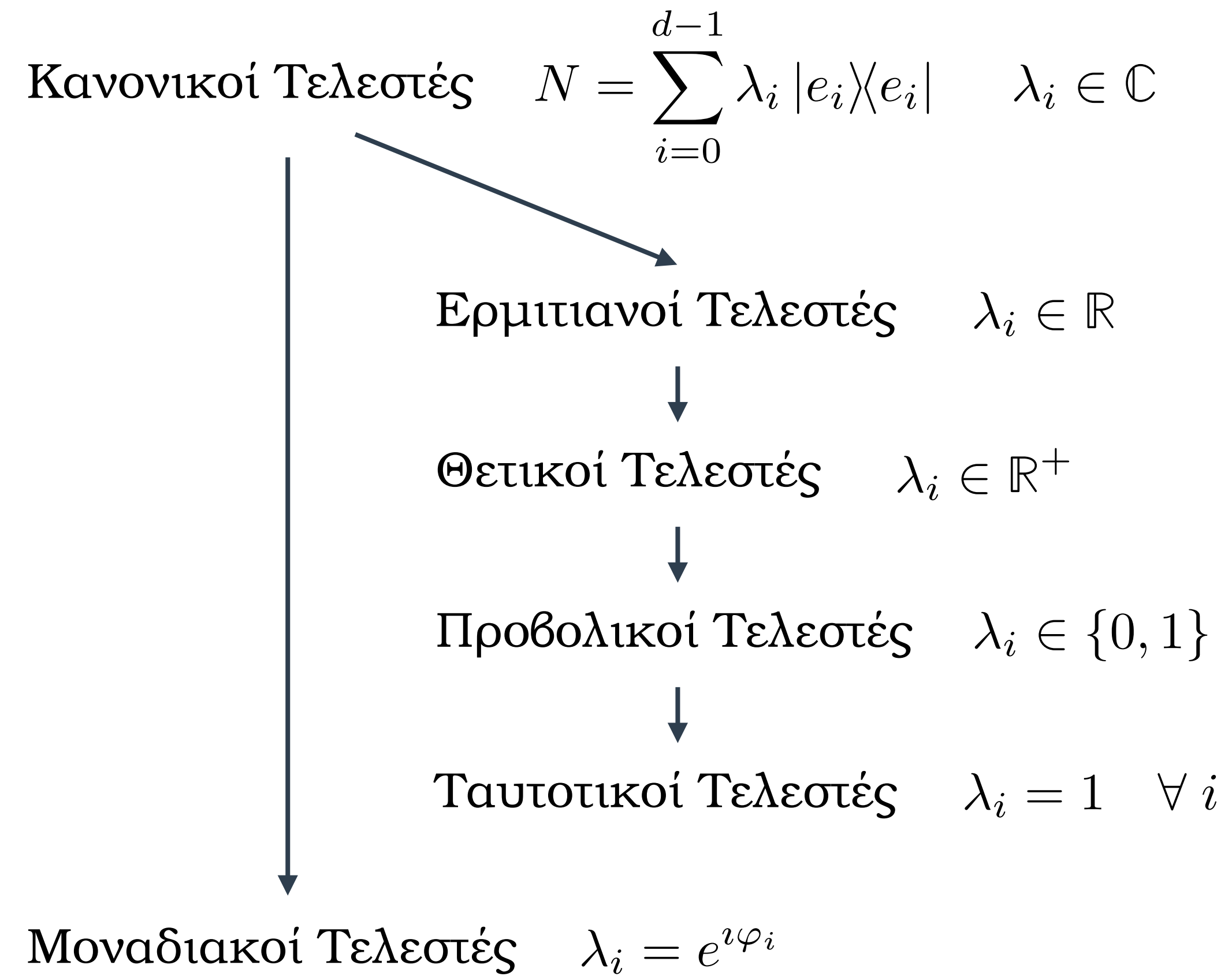
Δείτε και παράδειγμα 2.8

Δείτε και προβλήματα 2.1(δ), 2.4

Στο πρόβλημα 2.4(α) πρέπει να υποθέσουμε και μεταθετικότητα

- Ένας τελεστής ονομάζεται μοναδιαίος ή ταυτοτικός όταν: $I|\psi\rangle = |\psi\rangle$ όπου $I = \sum_{i=0}^{d-1} |e_i\rangle\langle e_i|$

Είδη Τελεστών



Απόδειξη για Ερμιτιανούς Τελεστές

Οι ιδιοτιμές ενός Ερμιτιανού τελεστή είναι πραγματικοί αριθμοί και τα ιδιοδιανύσματά του ορθογώνια μεταξύ τους

$$\left. \begin{array}{l} H |e_i\rangle = \lambda_i |e_i\rangle \Rightarrow \langle e_j | H |e_i\rangle = \lambda_i \langle e_j | e_i\rangle = \lambda_i \delta_{ij} \\ \langle e_j | H^\dagger = \langle e_j | \lambda_j^* \Rightarrow \langle e_j | H^\dagger |e_i\rangle = \lambda_j^* \langle e_j | e_i\rangle = \lambda_j^* \delta_{ij} \end{array} \right\} \Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j^*) \delta_{ij} = 0 \quad \text{αφού} \quad H = H^\dagger$$

$$i = j \Rightarrow \delta_{ij} = 1 \Rightarrow \lambda_i = \lambda_i^* \Rightarrow \text{πραγματικές ιδιοτιμές}$$

$$i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0 \Leftrightarrow \langle e_i | e_j \rangle = 0 \Rightarrow \text{ορθογώνια ιδιοδιανύσματα}$$

Τανυστικό Γινόμενο

Το τανυστικό γινόμενο δύο πινάκων ορίζεται ως:

$$X = \sum_{i,j=0}^{d-1} x_{ij} |e_i\rangle\langle e_j| \quad Y = \sum_{k,\ell=0}^{d-1} y_{k\ell} |e_k\rangle\langle e_\ell| \quad \longrightarrow \quad X \otimes Y = \sum_{i,j=0}^{d-1} \sum_{k,\ell=0}^{d-1} x_{ij} y_{k\ell} |e_i\rangle \otimes |e_k\rangle\langle e_j| \otimes \langle e_\ell|$$

Για παράδειγμα:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

$$X \otimes Y = \begin{bmatrix} x_{11} Y & x_{12} Y \\ x_{21} Y & x_{22} Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} & x_{12} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \\ x_{21} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} & x_{22} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}y_{11} & x_{11}y_{12} & x_{12}y_{11} & x_{12}y_{12} \\ x_{11}y_{21} & x_{11}y_{22} & x_{12}y_{21} & x_{12}y_{22} \\ x_{21}y_{11} & x_{21}y_{12} & x_{22}y_{11} & x_{22}y_{12} \\ x_{21}y_{21} & x_{21}y_{22} & x_{22}y_{21} & x_{22}y_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{Ιδιότητες: } (X_1 + X_2) \otimes Y = X_1 \otimes Y + X_2 \otimes Y$$

$$(\lambda X) \otimes Y = X \otimes (\lambda Y)$$

$$(X \otimes Y)^\dagger = X^\dagger \otimes Y^\dagger$$

$$\text{tr}(X \otimes Y) = \text{tr}(X) \text{tr}(Y)$$

Δείτε Προβλήματα

Δείτε και προβλήματα 2.11, 2.12, 2.14, 2.17, 2.18