

Κβαντομηχανική II

Διάλεξη 3

17 Οκτωβρίου 2025

Σπύρος Τσέρκης

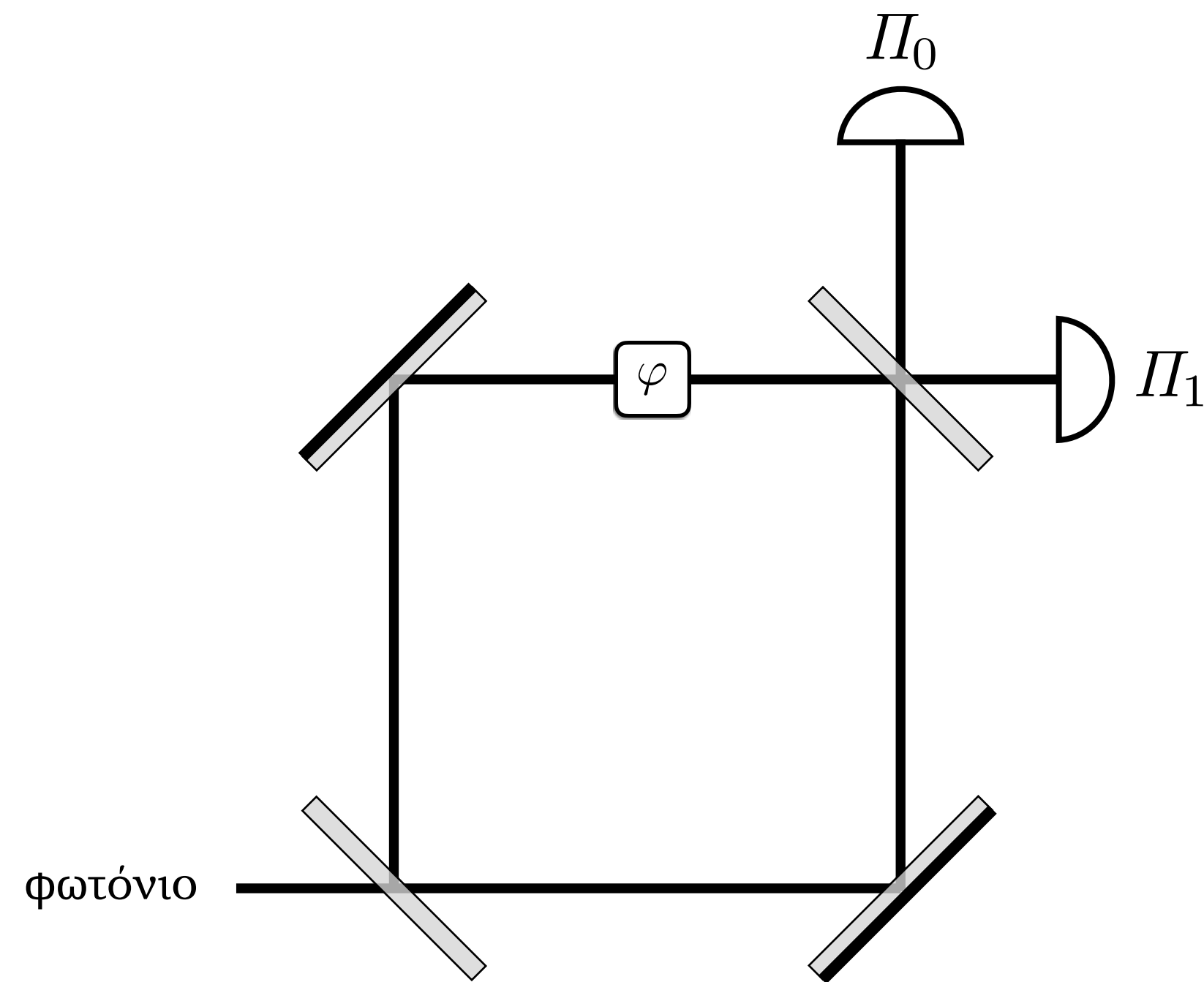


ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

DEMOCRITUS
UNIVERSITY
OF THRACE

Κβαντική Ιδιότητα - Παρατηρήσιμο Μέγεθος

Η ανίχνευση ενός φωτονίου είναι μία δυαδική ιδιότητα η οποία αναπαριστάται από έναν πίνακα:



$$\Pi_0 = |e_0\rangle\langle e_0| = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ιδιοτιμές: 0 και 1}$$

προβολικός

Ανίχνευση: 1 Μη-ανίχνευση: 0

$$\Pi_1 = |e_1\rangle\langle e_1| = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Ιδιοτιμές: 0 και 1}$$

Οι δύο περιπτώσεις είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα: $\Pi_0 \perp \Pi_1$

Η κβαντική ιδιότητα (ή παρατηρήσιμο μέγεθος) δίνεται από τον Ερμιτιανό τελεστή:

$$A = \lambda_0 \Pi_0 + \lambda_1 \Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_0 = 1 \\ \lambda_1 = -1 \end{array}$$

Ερμιτιανός

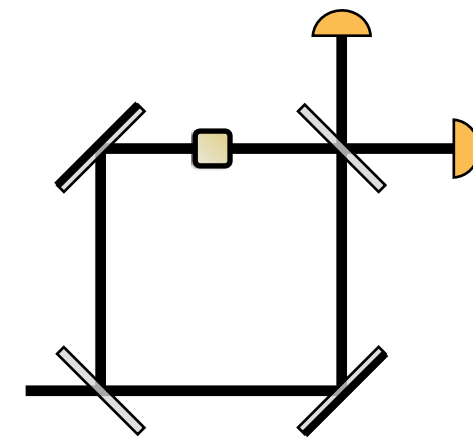
Ιδιοτιμές

Μετρήσεις

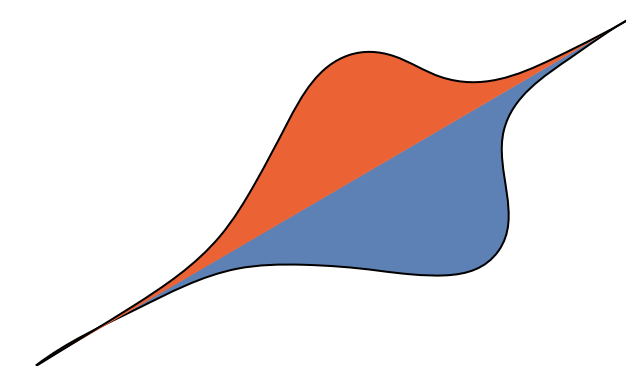
Άλλες Κβαντικές Ιδιότητες

Ιδιότητα με δύο πιθανές τιμές

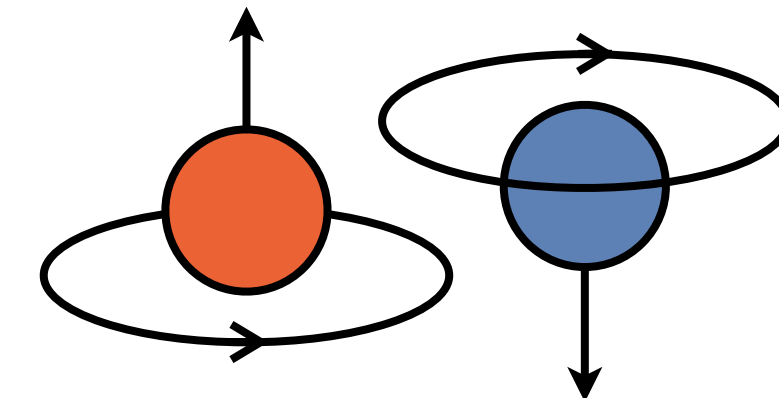
$$\begin{bmatrix} \star & \star \\ \star & \star \end{bmatrix}$$



ανίχνευση φωτονίου



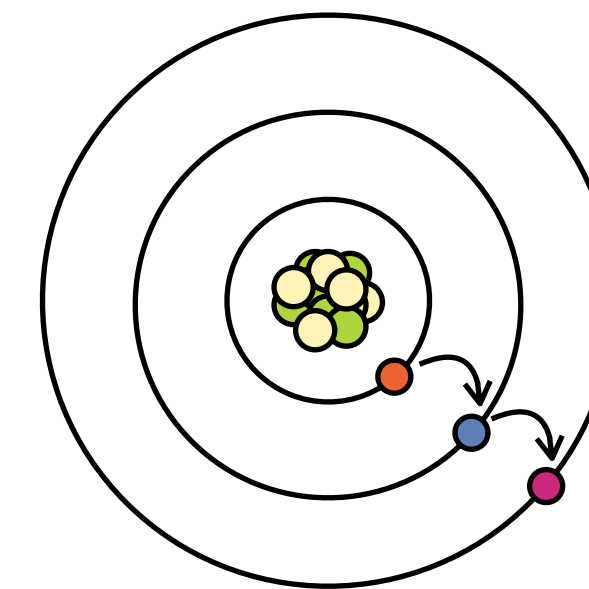
πόλωση φωτονίου



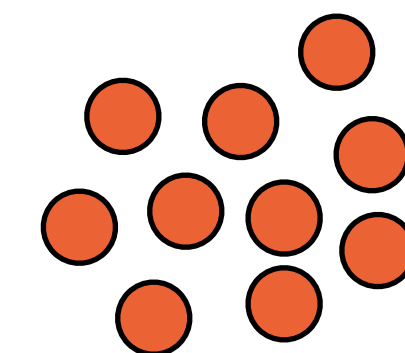
σπιν ηλεκτρονίου

Ιδιότητα με πεπερασμένες πιθανές τιμές

$$\begin{bmatrix} \star & \dots & \star \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \dots & \star \end{bmatrix}$$



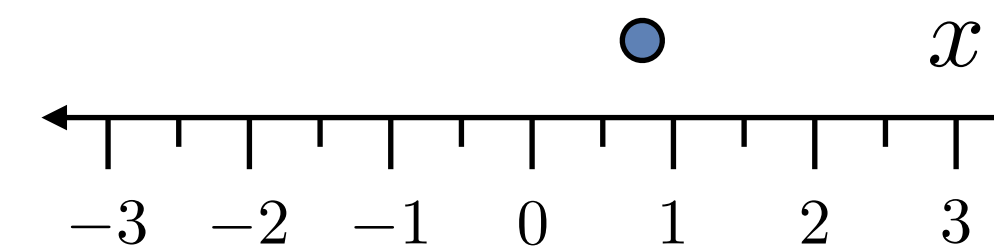
ηλεκτρονιακή διέγερση



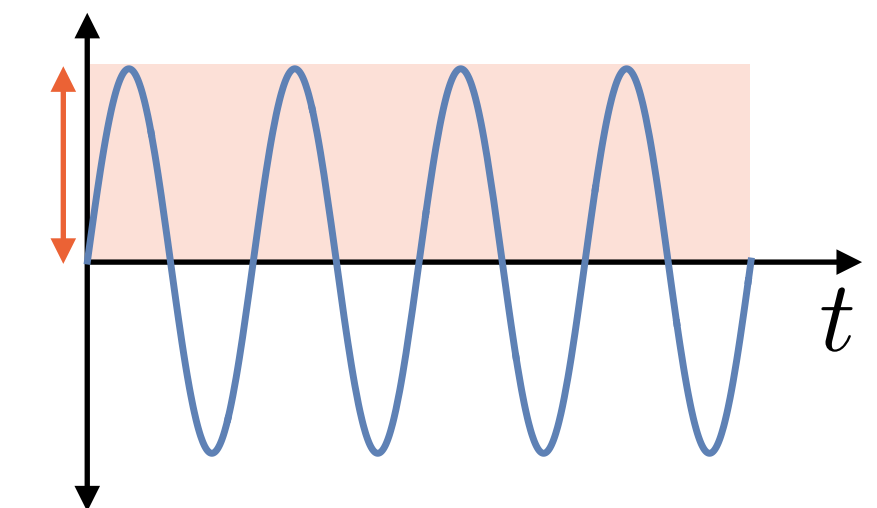
αριθμός φωτονίων

Ιδιότητα με άπειρες πιθανές τιμές

$$\begin{bmatrix} \star & \dots & \star & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ \star & \dots & \star & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$



θέση σωματιδίου



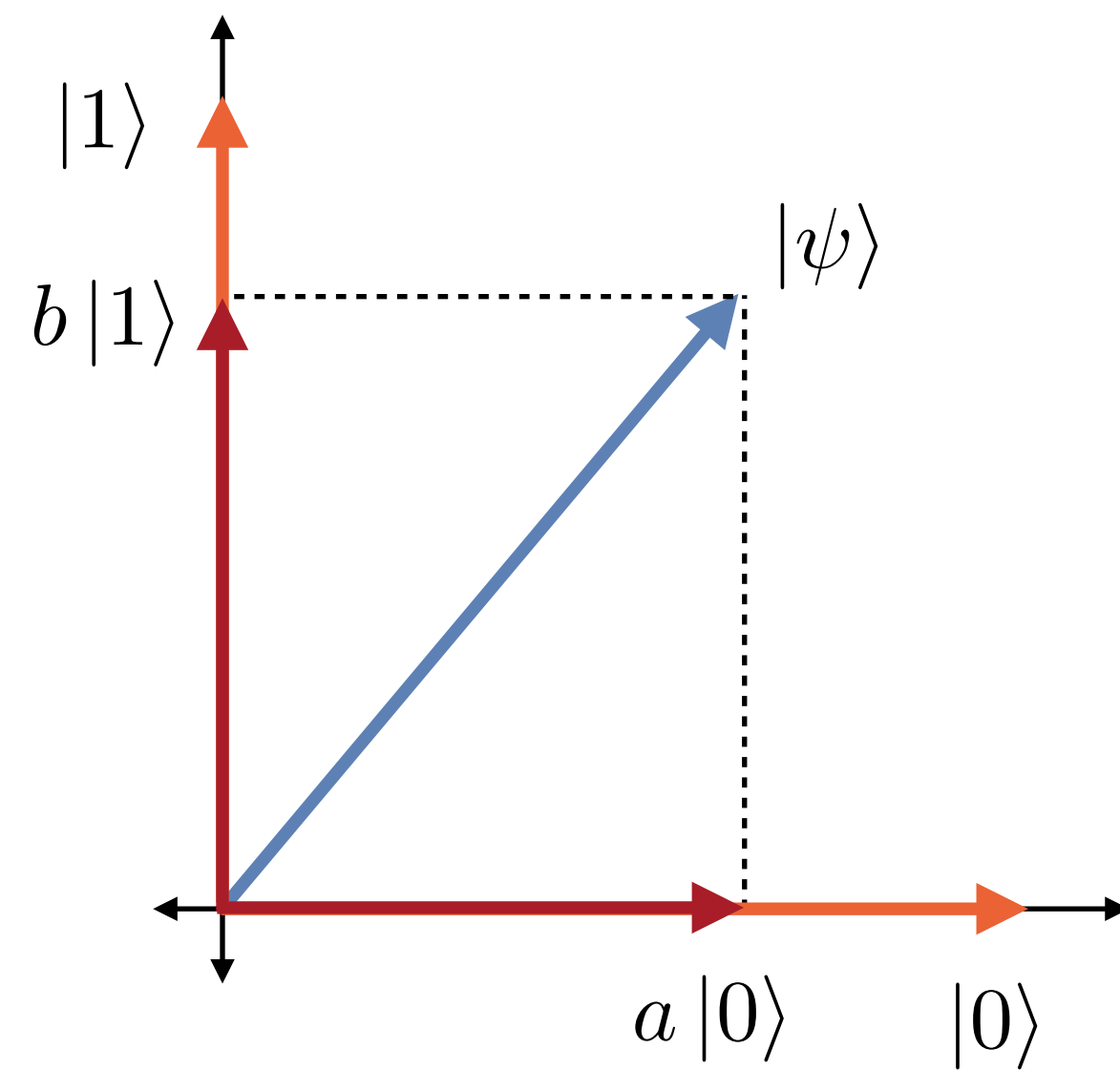
πλάτος κύματος

Κβαντική Κατάσταση

Ιδιότητα: $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$

περίπτωση: $|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ για ιδιοτιμή -1

περίπτωση: $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ για ιδιοτιμή 1



Δείτε και παράδειγμα 3.2

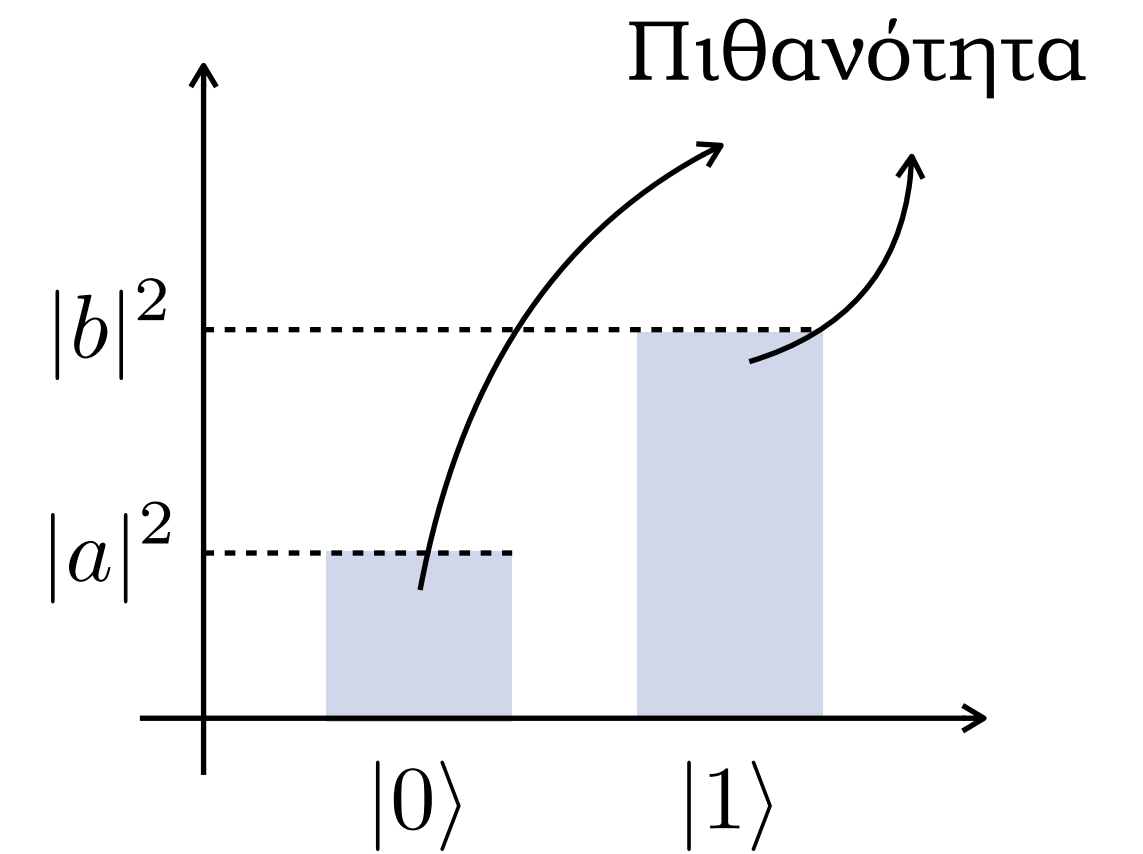
Πριν τη μέτρηση λέμε πως το σύστημα βρίσκεται στην υπέρθυση καταστάσεων

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

Κανόνας του Born

$\mathbb{P}(\lambda_0) = p_0 = |\langle 0|\psi\rangle|^2 = |a|^2$
πιθανότητα να βρούμε το
σύστημα στην κατάσταση $|0\rangle$

$\mathbb{P}(\lambda_1) = p_1 = |\langle 1|\psi\rangle|^2 = |b|^2$
πιθανότητα να βρούμε το
σύστημα στην κατάσταση $|1\rangle$



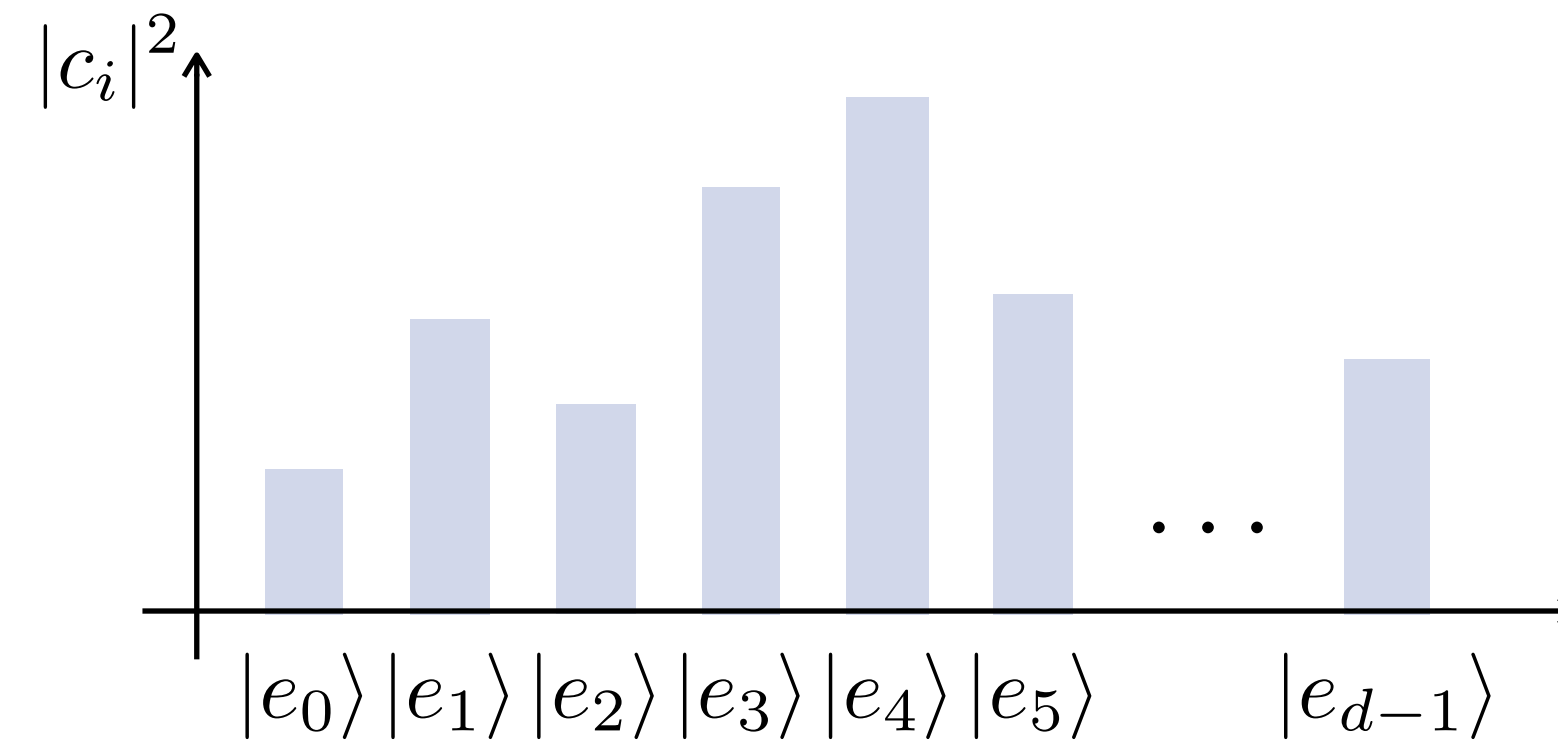
Όλες οι κβαντικές καταστάσεις
είναι κανονικοποιημένες

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

Κβαντική Κατάσταση Περισσότερων Διαστάσεων

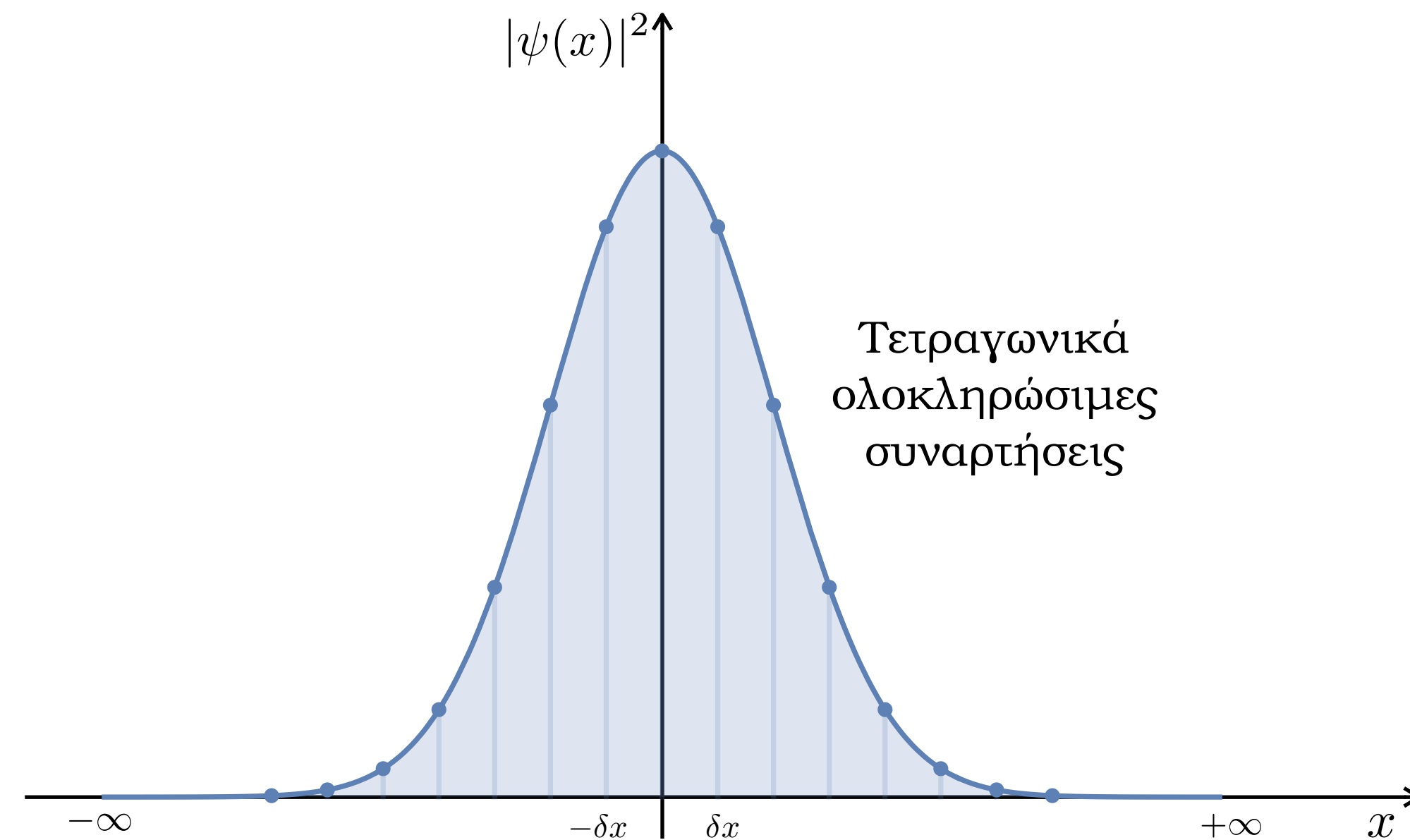
Διακριτή κβαντική κατάσταση

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} c_i |e_i\rangle$$



Συνεχής κβαντική κατάσταση

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) |x\rangle$$



Κβαντική Μέτρηση

Πριν τη μέτρηση το σύστημα βρίσκεται στην υπέρθεση καταστάσεων:

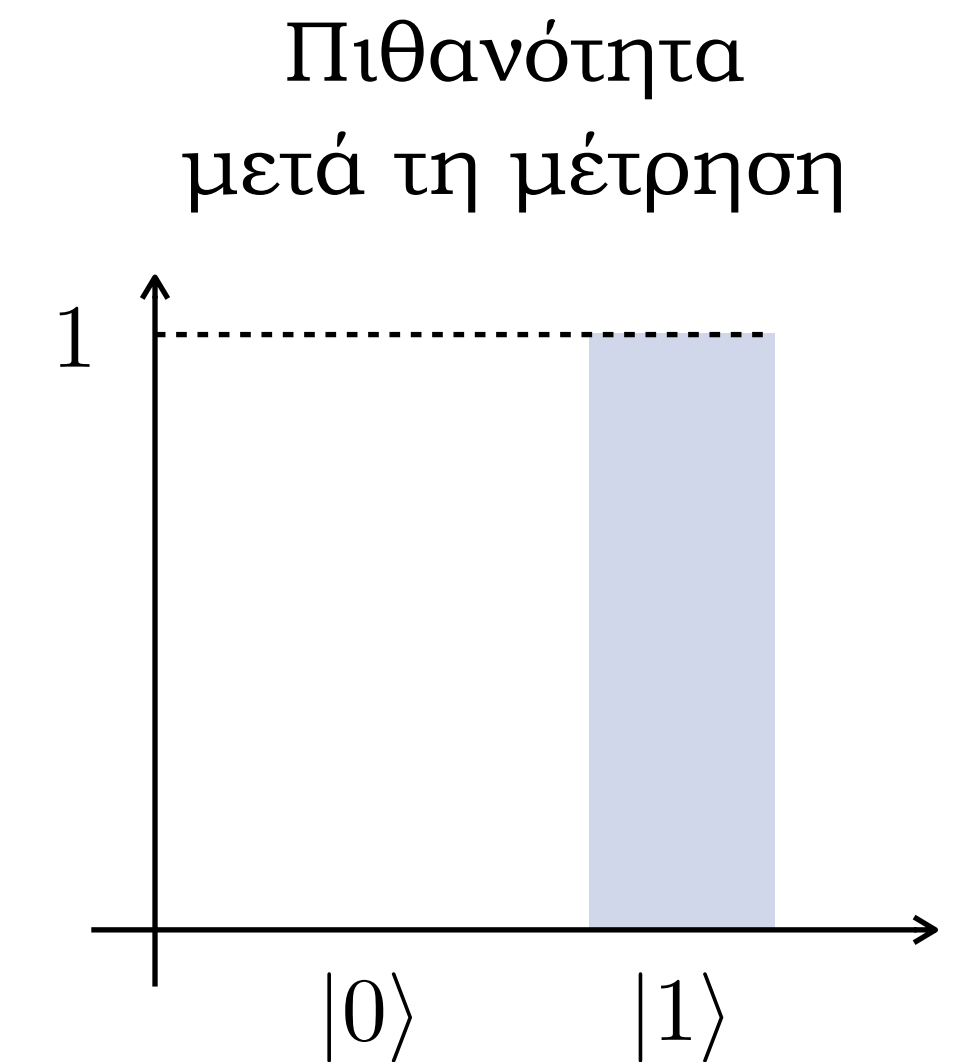
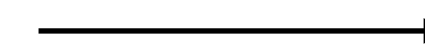
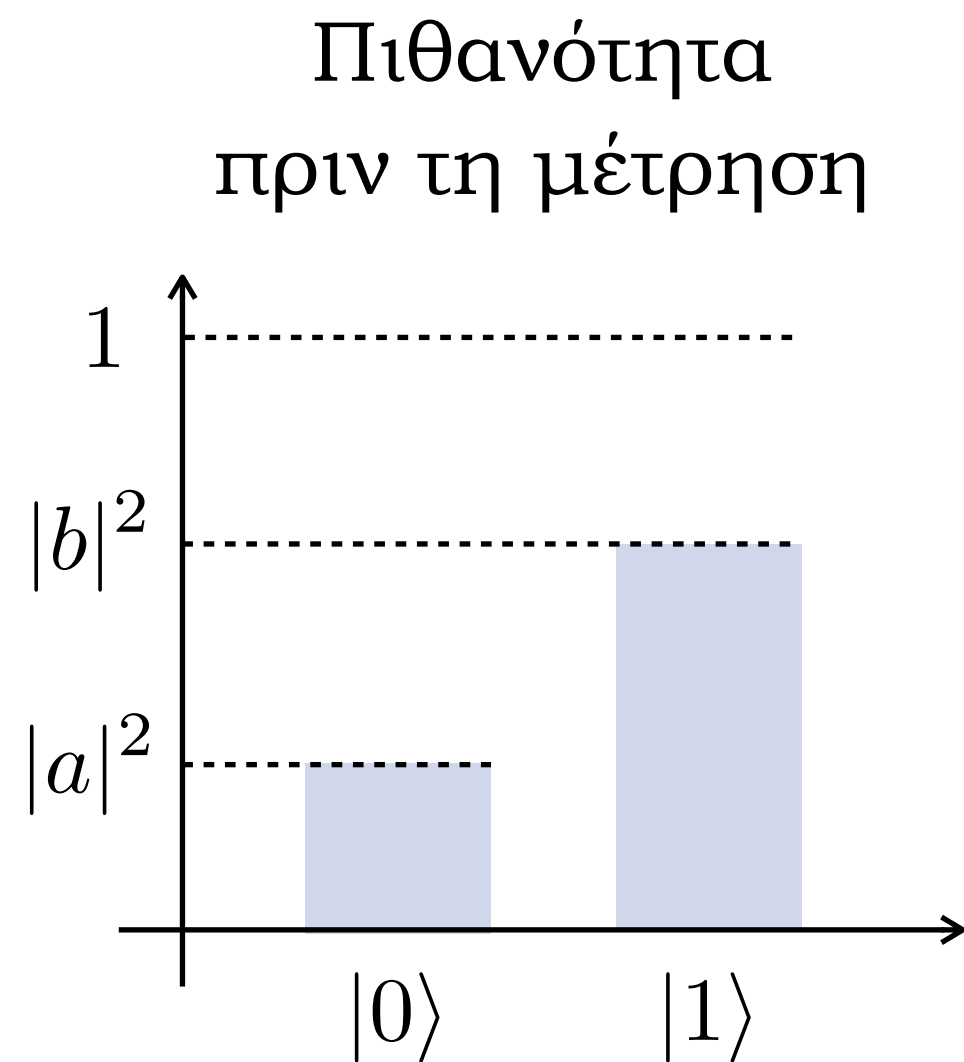
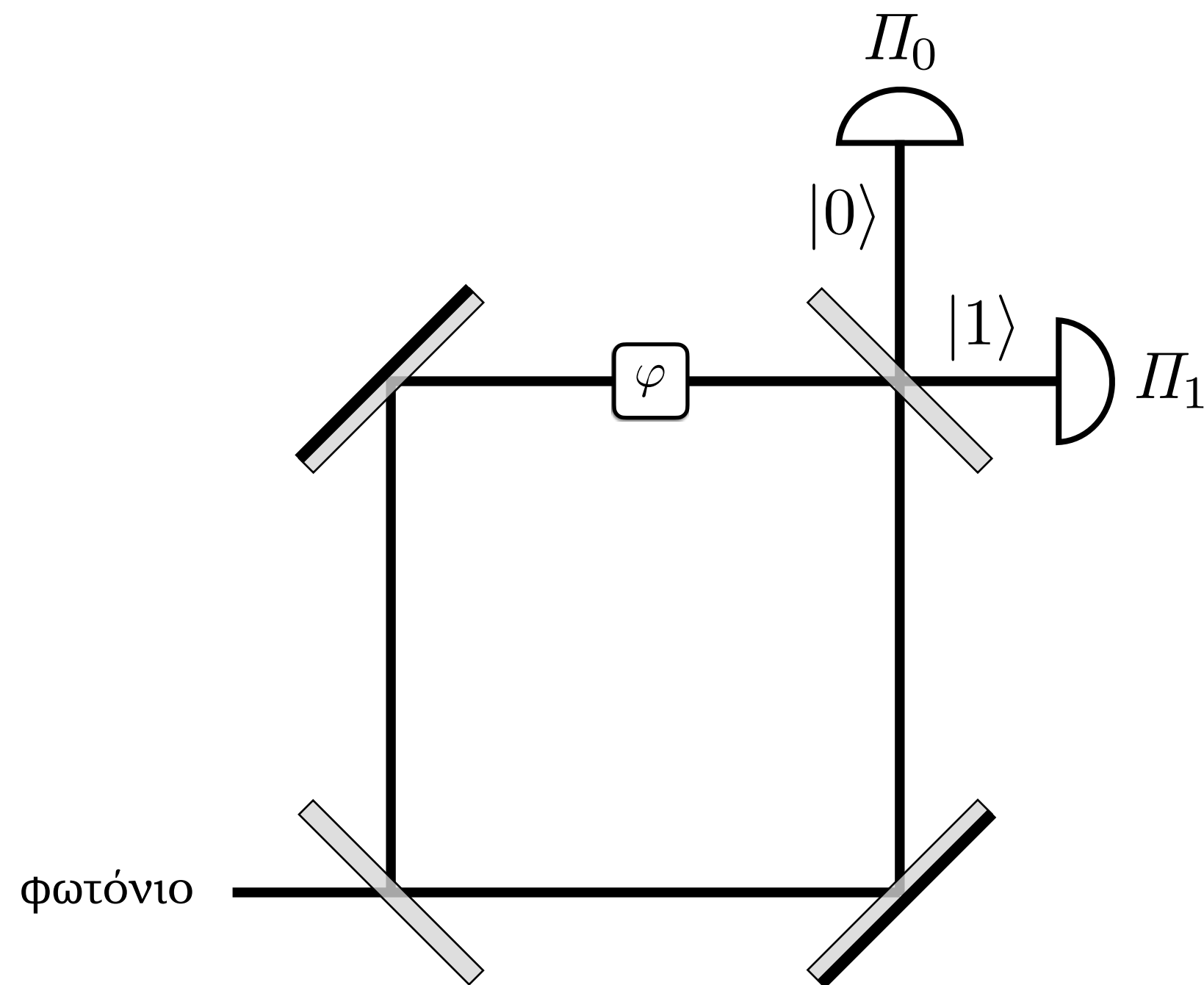
$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

Μετά τη μέτρηση το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση: $|0\rangle$ ή $|1\rangle$

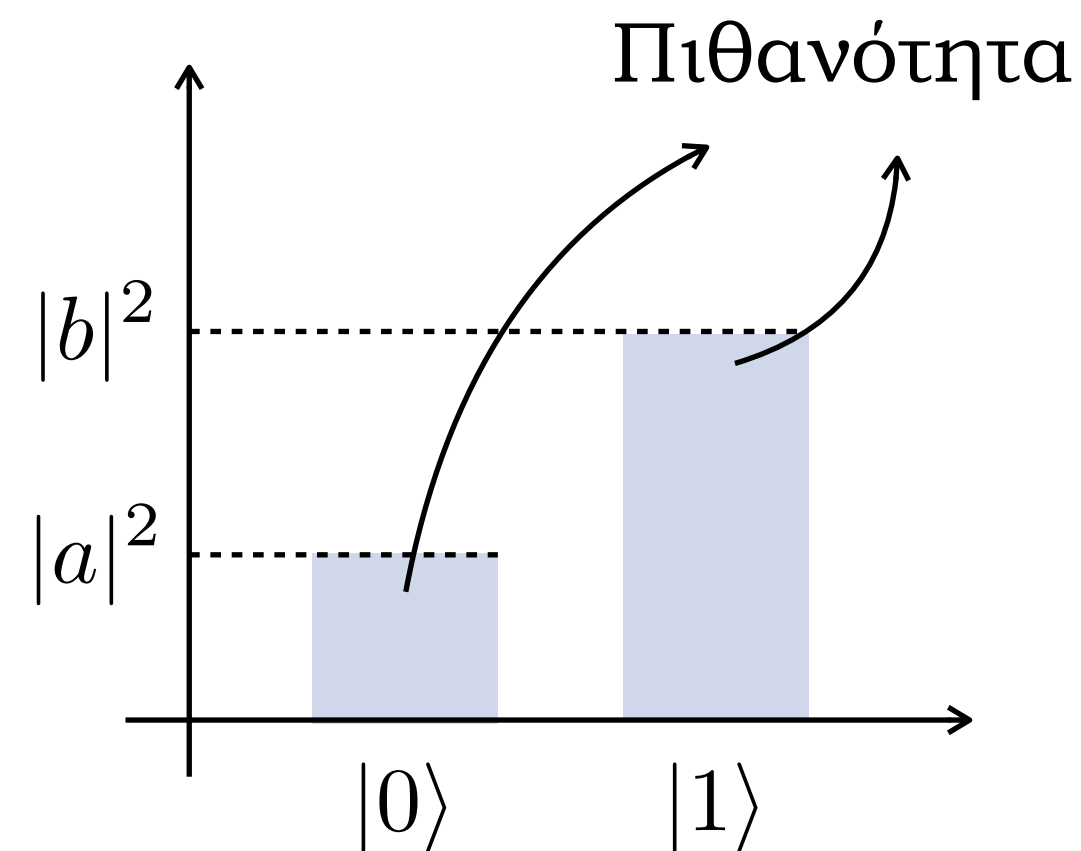
$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{\Pi_i |\psi\rangle}{\sqrt{p_i}}$$

προβολικός τελεστής $\Pi_0 = |0\rangle\langle 0|$ ή $\Pi_1 = |1\rangle\langle 1|$

πιθανότητα μέτρησης (για κανονικοποίηση)



Ερμηνεία Κβαντική Κατάστασης



$$|\psi\rangle = a |0\rangle + b |1\rangle$$

Ερμηνεία 1. Κβαντική κατάσταση ορίζεται ως η περιγραφή ενός μεμονωμένου κβαντικού συστήματος. Οι πιθανότητες των αποτελεσμάτων εκφράζουν τον βαθμό αβεβαιότητας που διαθέτουμε για μια μελλοντική μέτρηση του συστήματος.

(Schrödinger, Heisenberg, Bohr)

Ερμηνεία 2. Κβαντική κατάσταση ορίζεται ως η περιγραφή ενός συνόλου ανεξάρτητων, πανομοιότυπα προετοιμασμένων κβαντικών συστημάτων. Οι πιθανότητες των αποτελεσμάτων των μετρήσεων αντιστοιχούν στις σχετικές συχνότητες της κατανομής πιθανοτήτων.

(Einstein, Born)

Η μαθηματική περιγραφή της κβαντομηχανικής είναι η ίδια ασχέτως ερμηνείας.

Αναμενόμενες Τιμή Κβαντικής Κατάστασης

Μια τυχαία τιμή έχει πιθανές τιμές: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ με πιθανότητες: $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

Η αναμενόμενη τιμή μιας ιδιότητας: $\mathbb{E}(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$

Γραμμικότητα αναμενόμενης τιμής: $\mathbb{E}(\lambda X + \kappa Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \kappa \mathbb{E}(Y)$

Αν η κατανομή πιθανοτήτων είναι ομοιόμορφη τότε η αναμενόμενη τιμή είναι ο μέσος όρος.

Η αναμενόμενη τιμή μιας κβαντικής ιδιότητας $X = \sum_i x_i |e_i\rangle\langle e_i|$ στην κατάσταση $|\psi\rangle = \sum_i c_i |e_i\rangle$ είναι:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_i x_i p_i \\ &= \sum_i x_i |\langle e_i | \psi \rangle|^2 \\ &= \sum_i x_i \langle \psi | e_i \rangle \langle e_i | \psi \rangle \\ &= \sum_i \langle \psi | x_i | e_i \rangle \langle e_i | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | X | \psi \rangle = \langle X \rangle\end{aligned}$$

Δείτε και παράδειγμα 3.4

Δείτε και προβλήματα 2.5, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7(α)-(β), 3.8, 3.9