

# Κβαντομηχανική II

## Διάλεξη 4

24 Οκτωβρίου 2025

Σπύρος Τσέρκης



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΡΑΚΗΣ

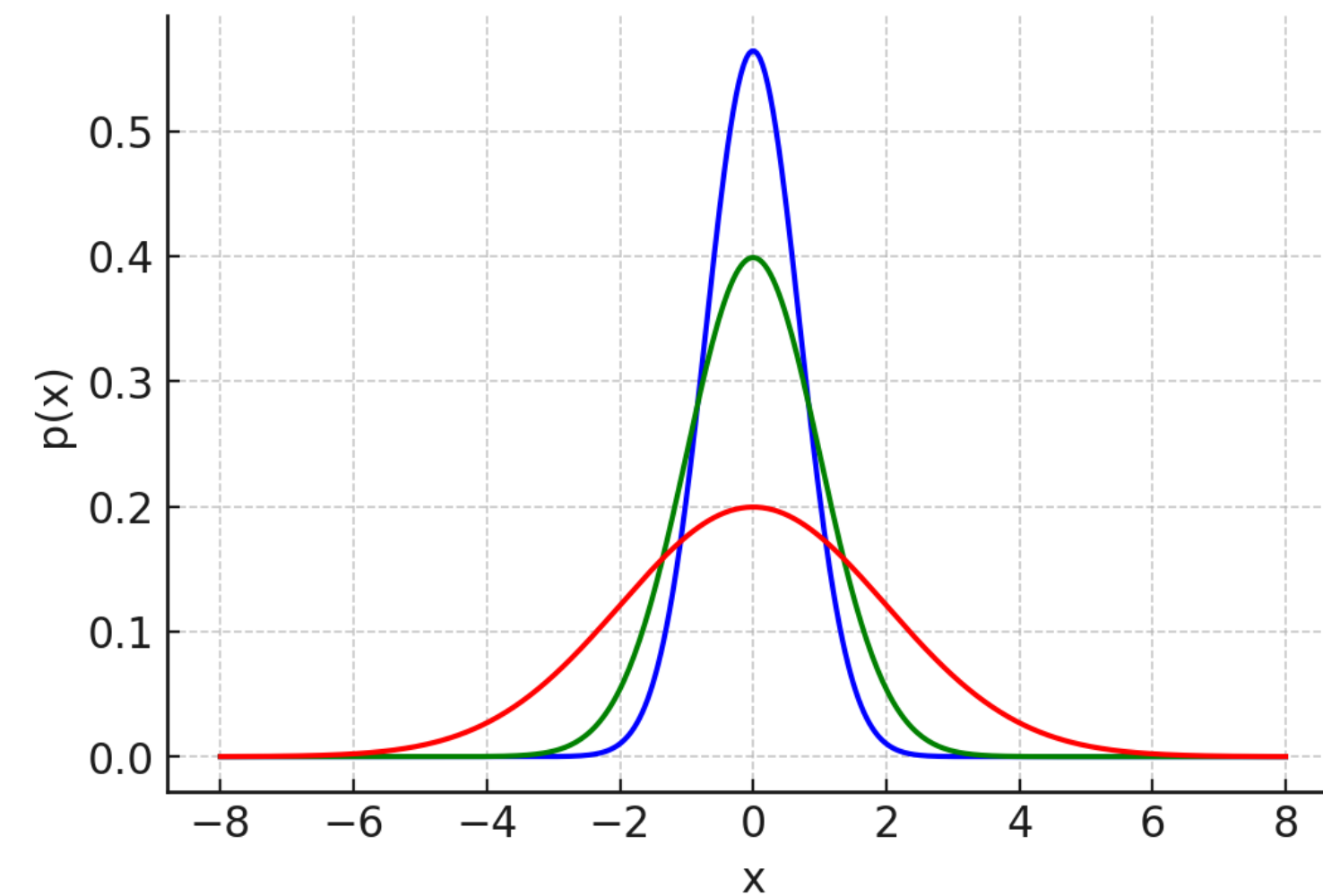
DEMOCRITUS  
UNIVERSITY  
OF THRACE

# Διασπορά και Τυπική Απόκλιση Κβαντικής Κατάστασης

Διασπορά ή Διακύμανση μιας ιδιότητας:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \\ &= \langle X^2 + \langle X \rangle^2 I - 2\langle X \rangle X \rangle \\ &= \langle (X - \langle X \rangle I)^2 \rangle \\ &= \langle (\Delta X)^2 \rangle\end{aligned}$$

Η διασπορά είναι το μέτρου του πόσο “απλωμένη” είναι μια κατανομή γύρω από τη μέση τιμή της.



Το δέλτα μιας κβαντικής ιδιότητας,  $\Delta X = X - \langle X \rangle I$ , είναι και αυτό Ερμιτιανός τελεστής

$$(\Delta X)^\dagger = X^\dagger - \langle X \rangle^* I^\dagger = X - \langle X \rangle I = \Delta X$$

Τυπική απόκλιση μιας ιδιότητας:  $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

# Αρχή Απροσδιοριστίας

Το γινόμενο των διασπορών δύο κβαντικών ιδιοτήτων είναι ίσο με:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) &= \langle (\Delta X)^2 \rangle \langle (\Delta Y)^2 \rangle \\ &= \langle \psi | (\Delta X)^2 | \psi \rangle \langle \psi | (\Delta Y)^2 | \psi \rangle \\ &= (\langle \psi | \Delta X) (\Delta X | \psi \rangle) (\langle \psi | \Delta Y) (\Delta Y | \psi \rangle) \quad (\text{λόγω Ερμιτιανότητας}) \\ &= \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwartz:  $|\langle x | y \rangle|^2 \leq \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) &\geq |\langle x | y \rangle|^2 \\ &= |\langle \psi | \Delta X \Delta Y | \psi \rangle|^2 \\ &= |\langle \Delta X \Delta Y \rangle|^2\end{aligned}$$

$$\text{Έχουμε επίσης} \quad \Delta X \Delta Y = \frac{\Delta X \Delta Y + \Delta Y \Delta X}{2} + \frac{\Delta X \Delta Y - \Delta Y \Delta X}{2} = \frac{1}{2} [\Delta X, \Delta Y]_+ + \frac{1}{2} [\Delta X, \Delta Y]_-$$



# Αρχή Απροσδιοριστίας

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) &\geqslant \left| \left\langle \frac{1}{2} [\Delta X, \Delta Y]_+ + \frac{1}{2} [\Delta X, \Delta Y]_- \right\rangle \right|^2 \\
 &= \underbrace{\left| \left\langle \frac{1}{2} [\Delta X, \Delta Y]_+ \right\rangle \right|^2}_{\text{πραγματικός αριθμός}} + \underbrace{\left| \left\langle \frac{1}{2} [\Delta X, \Delta Y]_- \right\rangle \right|^2}_{\text{φανταστικός αριθμός}}
 \end{aligned}
 \qquad \langle A + B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$$

Η αναμενόμενη τιμή του μεταθέτη Ερμιτιανών τελεστών είναι φανταστικός αριθμός:

$$z = \langle [A, B]_- \rangle \quad z^* = \langle [A, B]_-^\dagger \rangle = \langle [B^\dagger, A^\dagger]_- \rangle = \langle [B, A]_- \rangle = -\langle [A, B]_- \rangle = -z \Rightarrow z \in \mathbb{I}$$

Η αναμενόμενη τιμή του αντι-μεταθέτη Ερμιτιανών τελεστών είναι πραγματικός αριθμός:

$$z = \langle [A, B]_+ \rangle \quad z^* = \langle [A, B]_+^\dagger \rangle = \langle [B^\dagger, A^\dagger]_+ \rangle = \langle [B, A]_+ \rangle = \langle [A, B]_+ \rangle = z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$$

# Αρχή Απροσδιοριστίας

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) &\geqslant \left| \left\langle \frac{1}{2} [\Delta X, \Delta Y]_+ + \frac{1}{2} [\Delta X, \Delta Y]_- \right\rangle \right|^2 \\ &= \left| \underbrace{\left\langle \frac{1}{2} [\Delta X, \Delta Y]_+ \right\rangle}_{\text{πραγματικός αριθμός}} + \underbrace{\left\langle \frac{1}{2} [\Delta X, \Delta Y]_- \right\rangle}_{\text{φανταστικός αριθμός}} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \langle [\Delta X, \Delta Y]_+ \rangle^2 + \frac{1}{4} |\langle [\Delta X, \Delta Y]_- \rangle|^2\end{aligned}$$

Η αρχή της απροσδιοριστίας αποτελεί στατιστικό, όχι αιτιακό, νόμο. Εκφράζει το κατώτατο όριο του γινομένου διασποράς των δύο ιδιοτήτων όταν μετρούνται επαναληπτικά σε ένα σύνολο πανομοιότυπων κβαντικών συστημάτων που βρίσκονται στην ίδια κατάσταση.

$$|a + ib|^2 = a^2 + b^2 = a^2 + |ib|^2$$

$$= \frac{1}{4} \langle [\Delta X, \Delta Y]_+ \rangle^2 + \frac{1}{4} |\langle [X, Y]_- \rangle|^2 \quad \text{Απροσδιοριστία Robertson-Schrödinger}$$

$$\geqslant \frac{1}{4} |\langle [X, Y]_- \rangle|^2 \quad \text{Απροσδιοριστία Heisenberg}$$

Για τις ιδιότητες θέση και ορμή έχουμε:  $[X, P]_- = i\hbar I \Rightarrow \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(P) \geqslant \frac{\hbar^2}{4} \Leftrightarrow \sigma(X)\sigma(P) \geqslant \frac{\hbar}{2}$

# Συμπληρωματικότητα Ιδιοτήτων

Δύο κβαντικές ιδιότητες ονομάζονται συμπληρωματικές εάν

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_{i=0}^{d-1} x_i |e_i\rangle\langle e_i| \\ Y &= \sum_{i=0}^{d-1} y_i |h_i\rangle\langle h_i| \end{aligned} \right\} |\langle e_i | h_j \rangle|^2 = \frac{1}{d} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, d-1\}$$

Τότε οι ορθοκανονικές βάσεις ονομάζονται αμοιβαία αμερόληπτες βάσεις.

Όταν δύο ιδιότητες είναι συμπληρωματικές και μοναδιακές τότε αντι-μετατίθενται:  $[X, Y]_+ = 0$

Όταν δύο ιδιότητες μετατίθενται λέγονται συμβατές αλλιώς λέγονται ασύμβατες.



# Πίνακες Pauli

Ένα τυπικό παράδειγμα συμπληρωματικών ιδιοτήτων είναι οι πίνακες Pauli.

$$X = A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$$

$$Y = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} = |+i\rangle\langle+i| - |-i\rangle\langle-i| = i |1\rangle\langle 0| - i |0\rangle\langle 1|$$

$$Z = A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

Ορίζουν τις τρεις αμοιβαία αμερόληπτες βάσεις:

$$\{|0\rangle, |1\rangle\}$$

$$\{|+\rangle, |-\rangle\}$$

$$\{|+i\rangle, |-i\rangle\}$$

$$|\pm\rangle = \frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|\pm i\rangle = \frac{|0\rangle \pm i |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

## Συμπληρωματικότητα και Αβεβαιότητα

Για παράδειγμα:  $|\langle 0|+\rangle|^2 = \left| \langle 0| \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right|^2 = \frac{1}{2} |\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle|^2 = \frac{1}{2}$

Όταν η τιμή μιας ιδιότητας μπορεί να προβλεφθεί με βεβαιότητα τότε οι μετρήσεις μιας συμπληρωματικής ιδιότητας είναι ισοπίθανες, άρα το αποτέλεσμα είναι αβέβαιο.

Εάν η κβαντική κατάσταση είναι  $|0\rangle$  τότε η τιμή της ιδιότητας  $X$  ή  $Y$  θα είναι τυχαία.

$$\left. \begin{aligned} |+\rangle &= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \\ |-\rangle &= \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |0\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbb{P}(\lambda_+) = p_+ = |\langle +|0\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(\lambda_-) = p_- = |\langle -|0\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

Άρα μετά τη μέτρηση έχουμε:  $|0\rangle \rightarrow \frac{|+\rangle \langle +|0\rangle}{\sqrt{p_+}} = \frac{\langle +|0\rangle |+\rangle}{\sqrt{p_+}} = \frac{(1/\sqrt{2}) |+\rangle}{1/\sqrt{2}}$



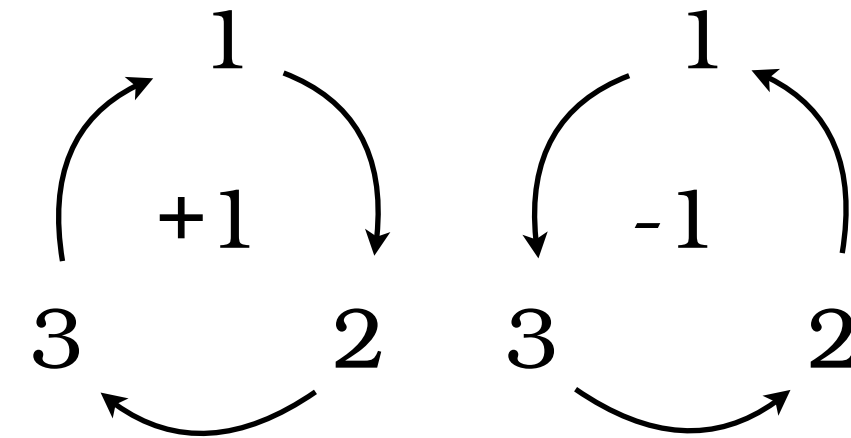
# Ιδιότητες Πίνακες Pauli

$$\diamond \Lambda_i \Lambda_j = \delta_{ij} I + i \epsilon_{ijk} \Lambda_k$$

$$\diamond [\Lambda_i, \Lambda_j]_- = 2i \epsilon_{ijk} \Lambda_k$$

$$\diamond [\Lambda_i, \Lambda_j]_+ = 2\delta_{ij} I$$

Levi-Civita σύμβολο



(Μηδενίζεται όταν έχουμε ίδιες τιμές στη σειρά)

Για παράδειγμα:

$$\begin{aligned} [X, Y]_- &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix} \\ &= 2i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 2iZ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [X, Y]_- &= \Lambda_1 \Lambda_2 - \Lambda_2 \Lambda_1 \\ &= \delta_{12} I + i \epsilon_{123} \Lambda_3 - \delta_{21} I - i \epsilon_{213} \Lambda_3 \\ &= i \Lambda_3 + i \Lambda_3 \\ &= 2i \Lambda_3 \\ &= 2iZ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [X, Y]_- &= 2i \epsilon_{123} \Lambda_3 \\ &= 2iZ \end{aligned}$$

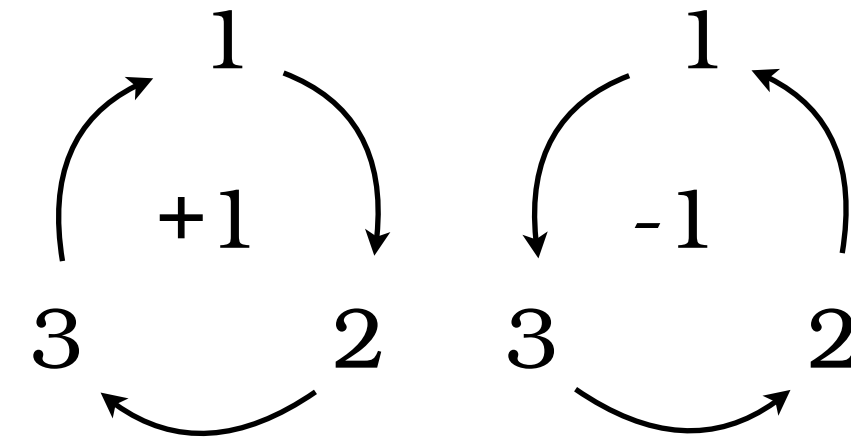
# Ιδιότητες Πίνακες Pauli

$$\diamond \Lambda_i \Lambda_j = \delta_{ij} I + i \epsilon_{ijk} \Lambda_k$$

$$\diamond [\Lambda_i, \Lambda_j]_- = 2i \epsilon_{ijk} \Lambda_k$$

$$\diamond [\Lambda_i, \Lambda_j]_+ = 2\delta_{ij} I$$

Levi-Civita σύμβολο



(Μηδενίζεται όταν έχουμε ίδιες τιμές)

Για παράδειγμα:

$$\begin{aligned} [X, Y]_+ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [X, Y]_+ &= \Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_2 \Lambda_1 \\ &= \delta_{12} I + i \epsilon_{123} \Lambda_3 + \delta_{21} I + i \epsilon_{213} \Lambda_3 \\ &= i \Lambda_3 - i \Lambda_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [X, Y]_+ &= 2\delta_{12} I \\ &= 0 \end{aligned}$$

# Ιδιότητες Πίνακες Pauli

$$\diamond \Lambda_i^2 = I$$

Για παράδειγμα:  $X^2 = XX$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I$$

$$X^2 = \Lambda_1 \Lambda_1$$

$$= \delta_{11} I + i\epsilon_{11?} \Lambda_?$$

$$= I$$

$$\diamond \text{tr}(\Lambda_i) = 0$$

$$\diamond \det(\Lambda_i) = -1$$



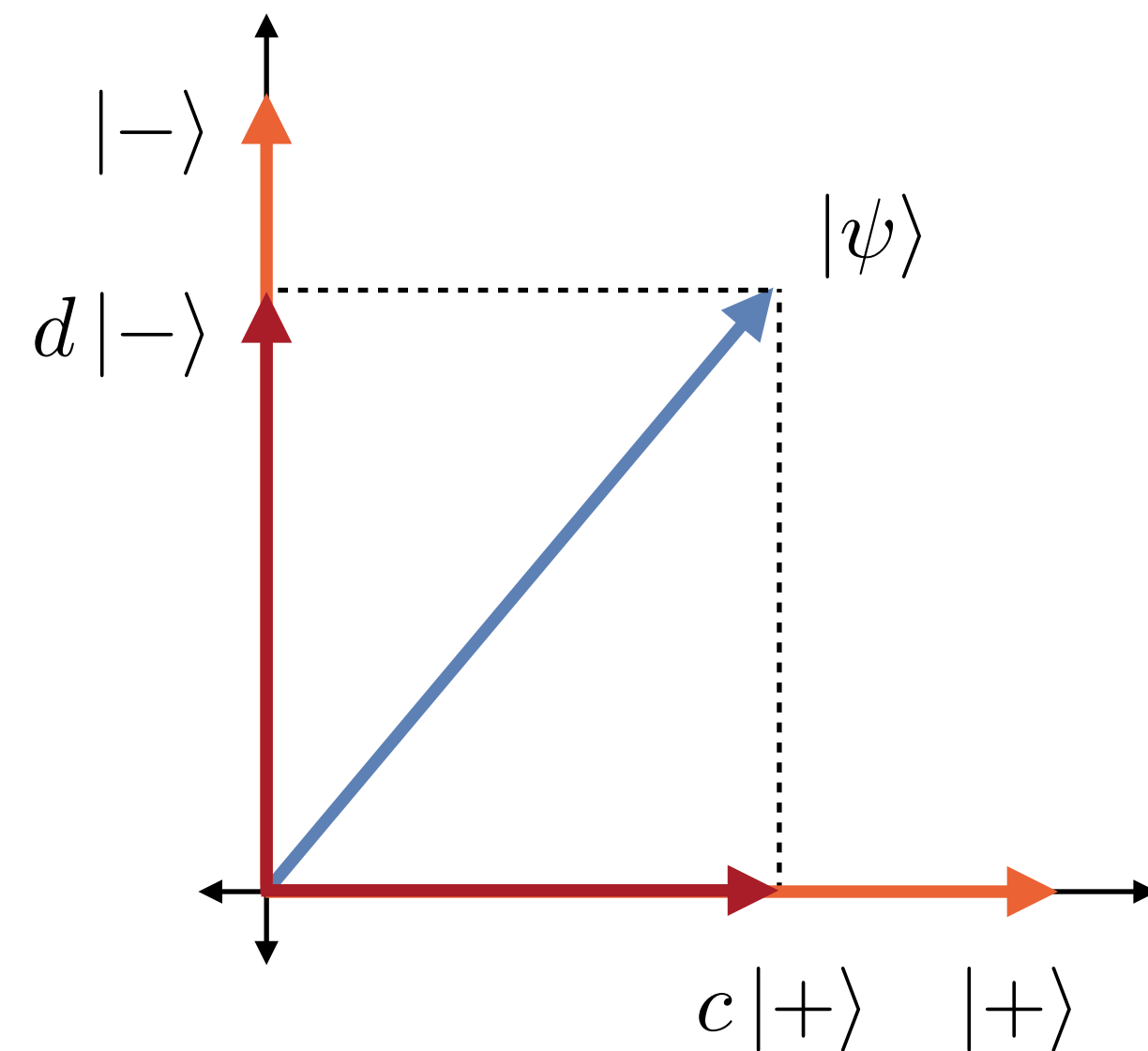
# Κβαντική Κατάσταση

Ιδιότητα:  $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|$

περίπτωση:  $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  για ιδιοτιμή -1

περίπτωση:  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  για ιδιοτιμή 1

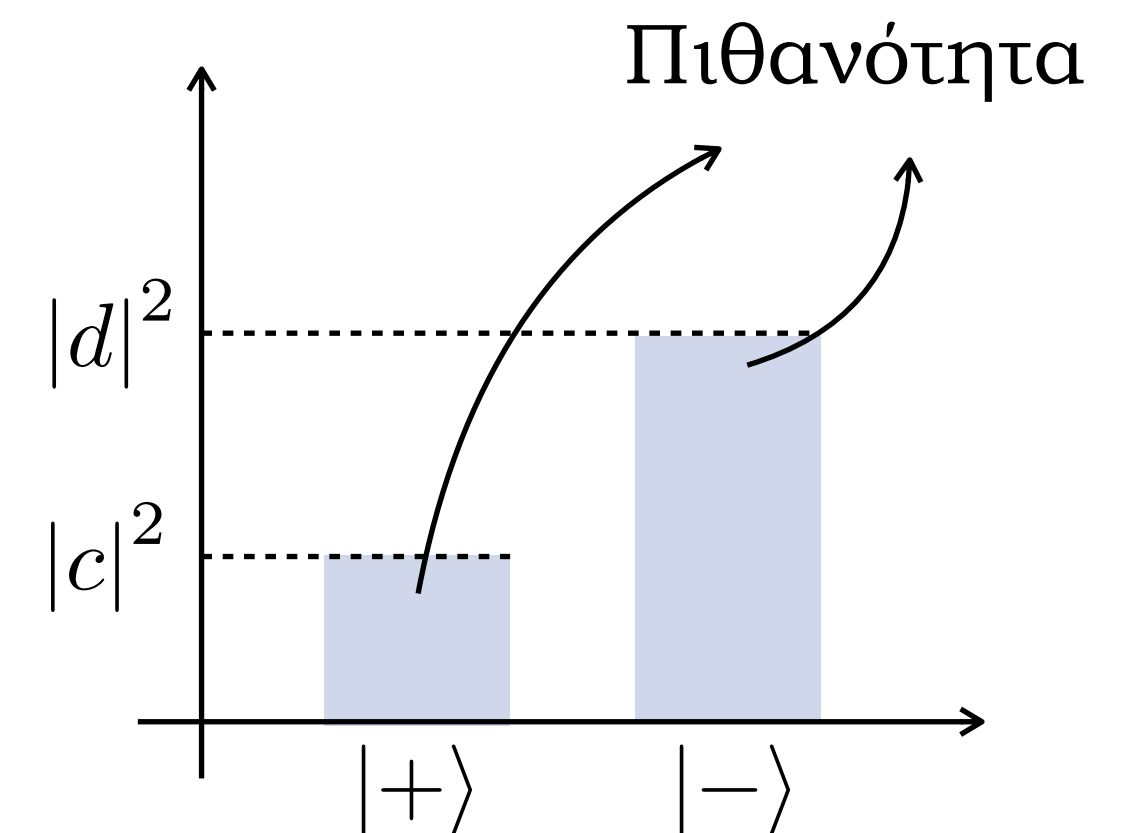
$|\pm\rangle = \frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}}$



Υπέρθωση:  $|\psi\rangle = c|+\rangle + d|-\rangle$

$\mathbb{P}(\lambda_+) = p_+ = |\langle+|\psi\rangle|^2 = |c|^2$

$\mathbb{P}(\lambda_-) = p_- = |\langle-|\psi\rangle|^2 = |d|^2$



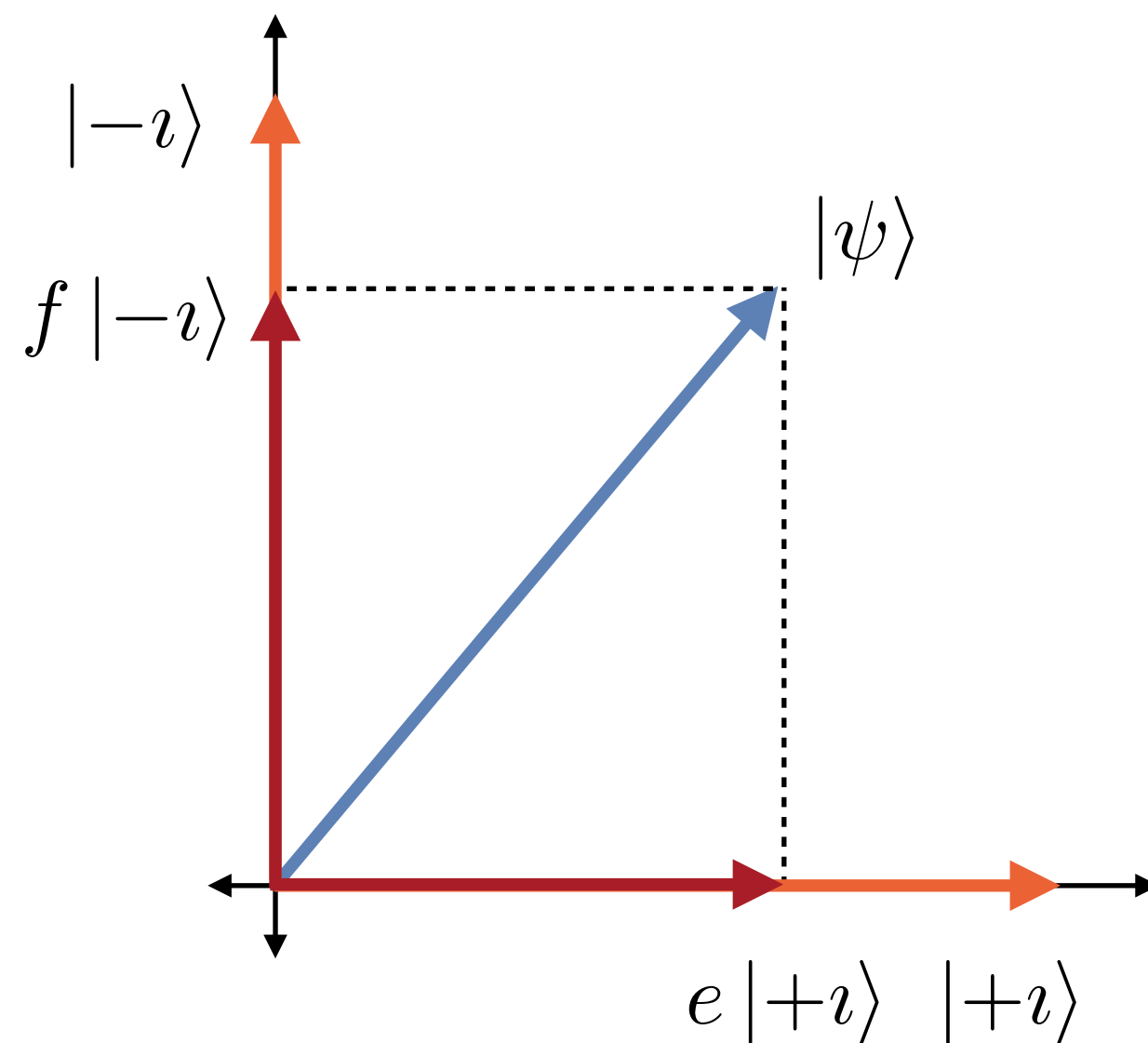
# Κβαντική Κατάσταση

Ιδιότητα:  $Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|$

περίπτωση:  $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  για ιδιοτιμή -1

περίπτωση:  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$  για ιδιοτιμή 1

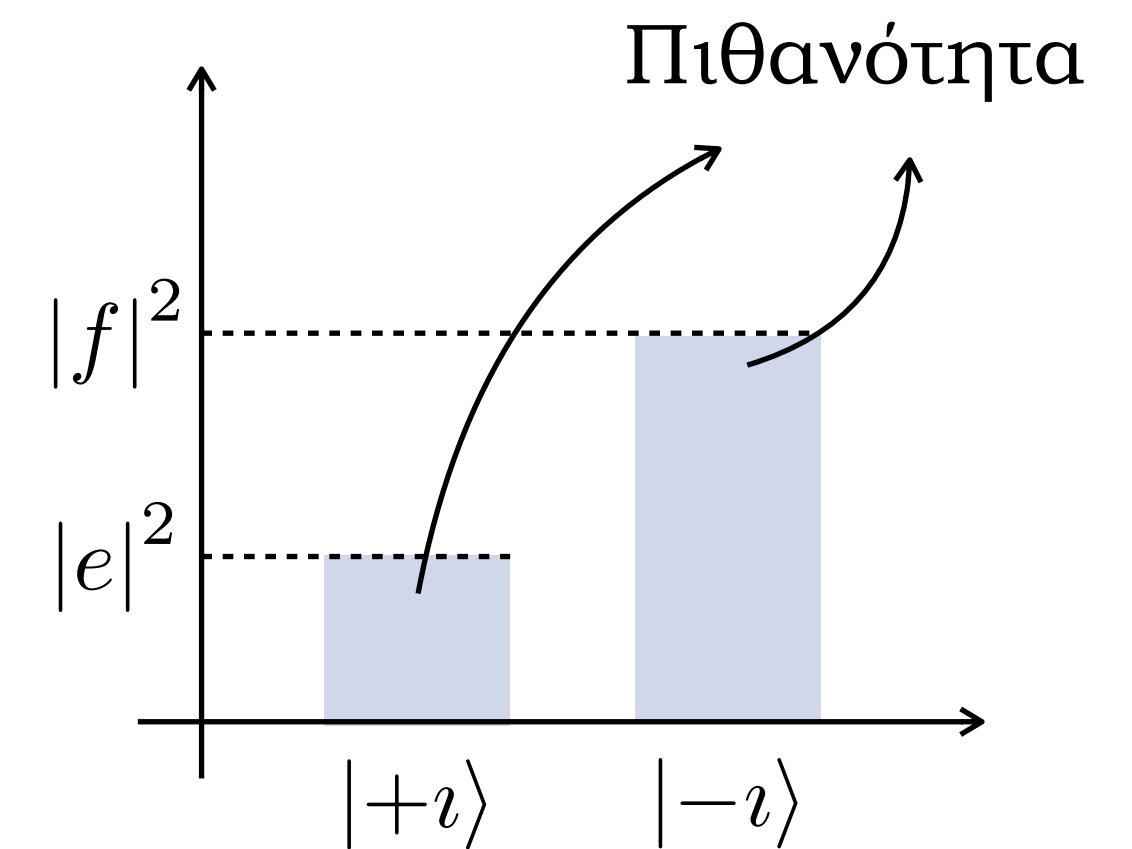
$|\pm\rangle = \frac{|0\rangle \pm i|1\rangle}{\sqrt{2}}$



Υπόθεση:  $|\psi\rangle = e|+\rangle + f|-\rangle$

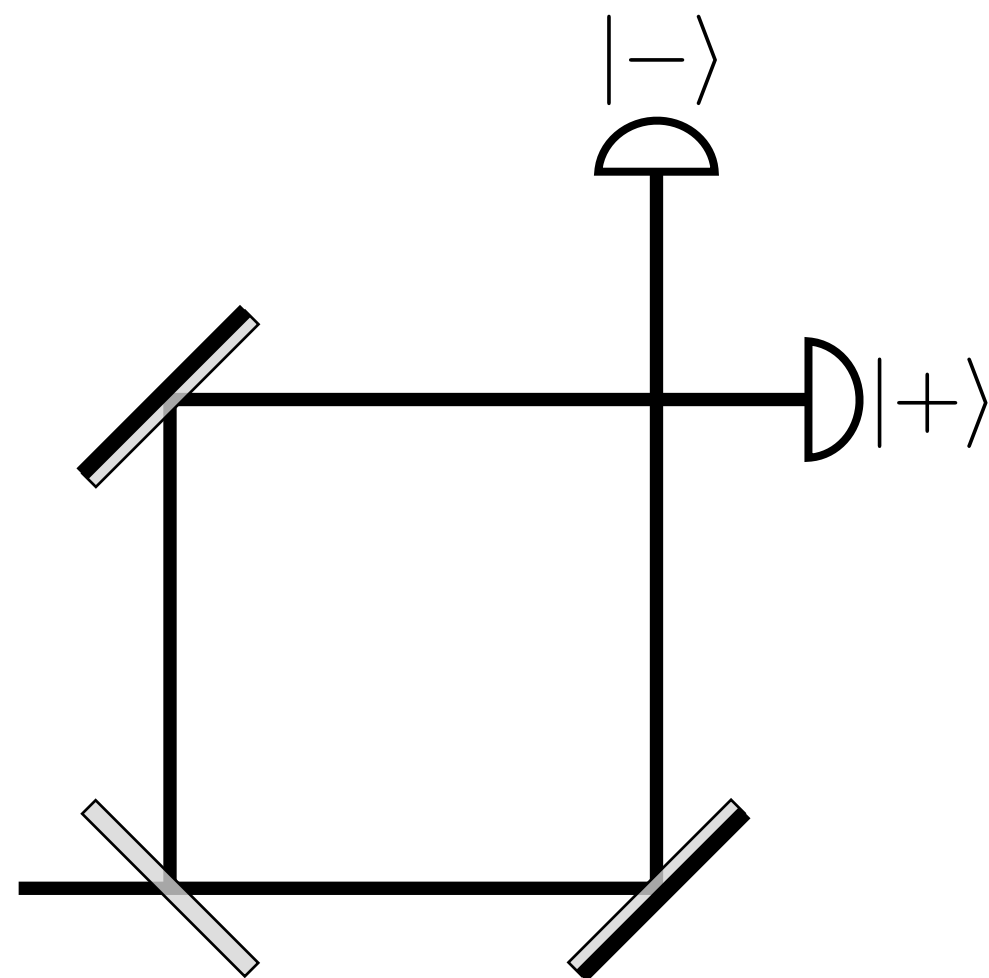
$\mathbb{P}(\lambda_{+}) = p_{+} = |\langle +|\psi\rangle|^2 = |e|^2$

$\mathbb{P}(\lambda_{-}) = p_{-} = |\langle -|\psi\rangle|^2 = |f|^2$

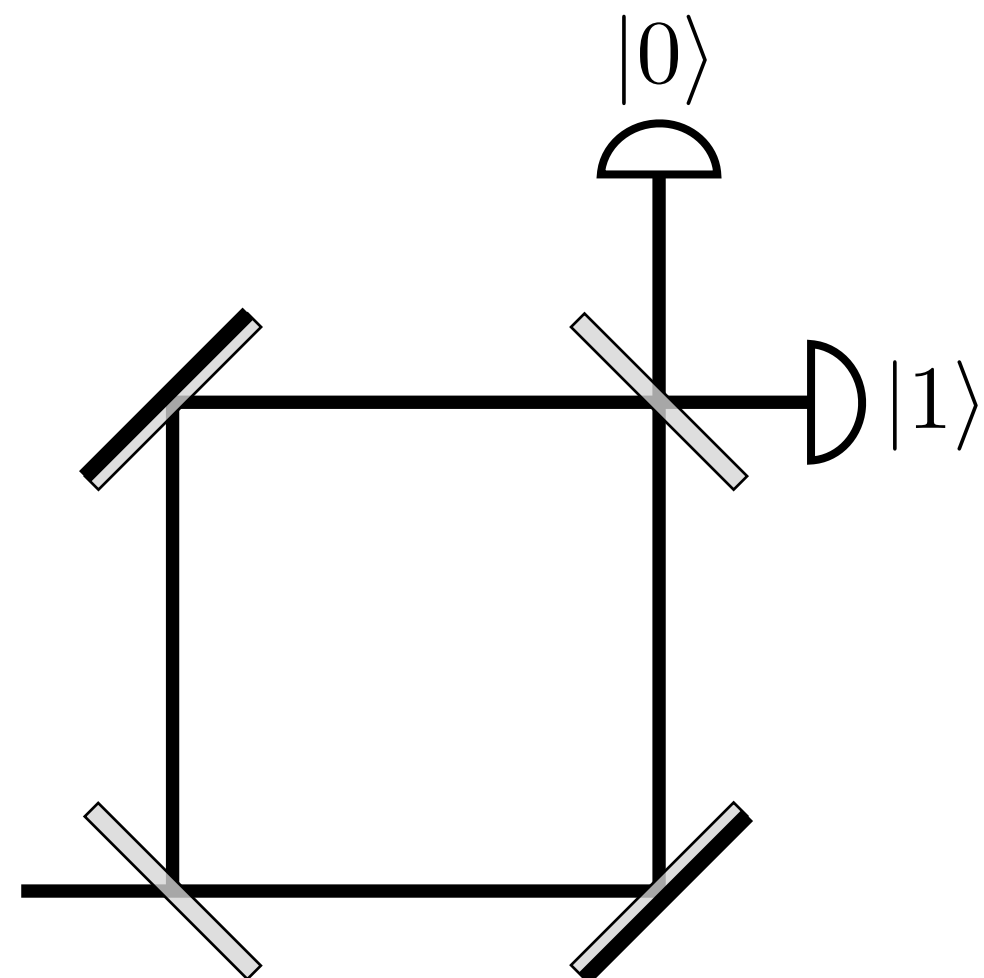


# Κβαντικές Καταστάσεις

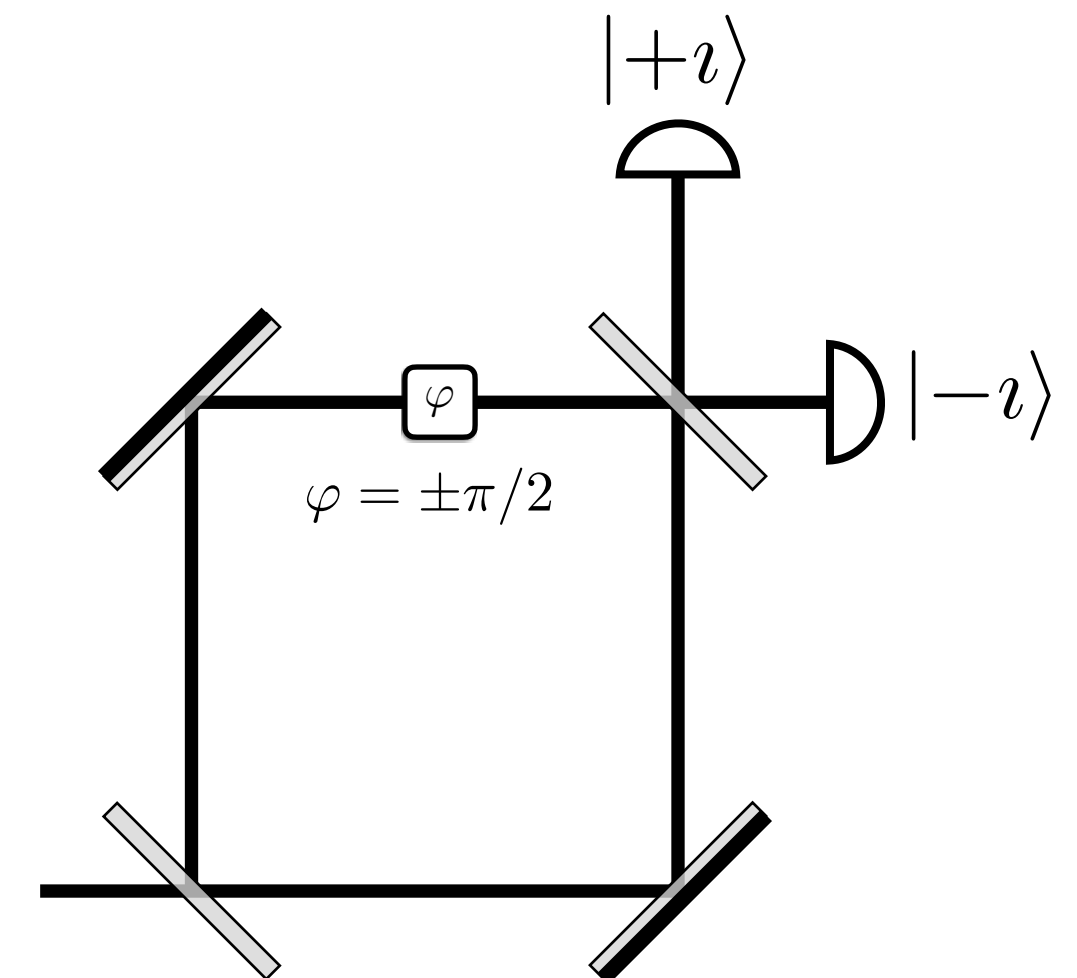
$$X = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|$$



$$Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$



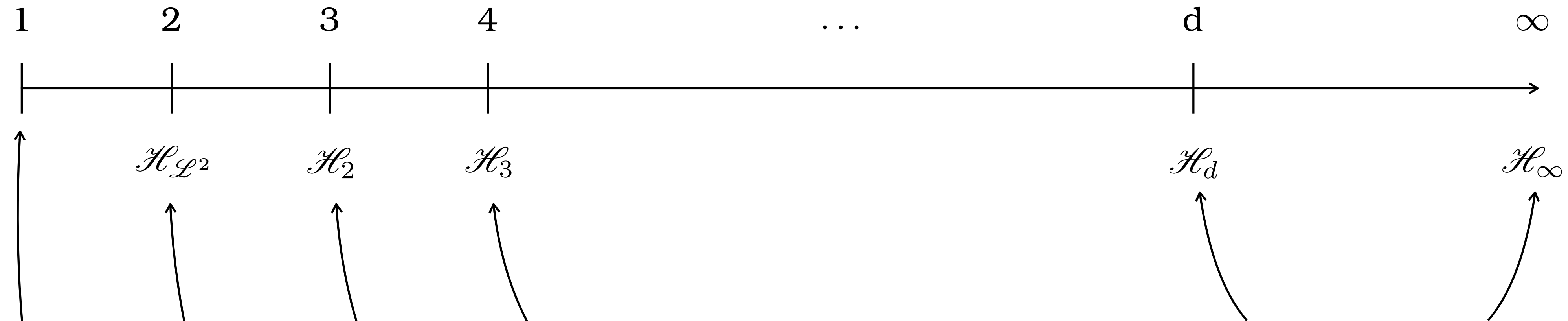
$$Y = |+\imath\rangle\langle+\imath| - |-\imath\rangle\langle-\imath|$$





# Συμπληρωματικότητα και Χώροι Hilbert

Για έναν χώρο Hilbert  $\mathcal{H}_d$  υπάρχουν το πολύ  $d + 1$  αμοιβαία αμερόληπτες βάσεις.



Συμπληρωματικές κβαντικές ιδιότητες με διακριτό φάσμα τιμών

4 συμπληρωματικές κβαντικές ιδιότητες με διακριτό φάσμα δύο τιμών.

3 συμπληρωματικές κβαντικές ιδιότητες με διακριτό φάσμα δύο τιμών, π.χ., πίνακες Pauli.

2 συμπληρωματικές κβαντικές ιδιότητες με συνεχές φάσμα, π.χ. θέση και ορμή.

Κλασική Φυσική: Οι κλασικές ιδιότητες ΔΕΝ είναι συμπληρωματικές.

# Θεώρημα

Εάν δύο μη-εκφυλισμένες ιδιότητες είναι συμβατές, οι αντίστοιχοι τελεστές τους διαθέτουν ένα σύνολο κοινών ιδιοκαταστάσεων.

Απόδειξη:  $X |e_i\rangle = x_i |e_i\rangle \Leftrightarrow X = \sum_i x_i |e_i\rangle\langle e_i|$  άρα η ιδιότητα είναι διαγώνιος σε αυτή τη βάση

Θέλουμε να δείξουμε πως και ο  $Y$  είναι διαγώνιος στην ίδια βάση

$$\begin{aligned} \langle e_j | [X, Y]_- |e_i\rangle &= \langle e_j | (XY - YX) |e_i\rangle \\ &= \langle e_j | XY - YX |e_i\rangle \\ &= (x_j^* - x_i) \langle e_j | Y |e_i\rangle \\ &= (x_j - x_i) \langle e_j | Y |e_i\rangle = 0 \Rightarrow \langle e_j | Y |e_i\rangle = 0 \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & \cdots \\ 0 & y_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \sum_i y_i |e_i\rangle\langle e_i| \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} X |e_i\rangle &= x_i |e_i\rangle \\ YX |e_i\rangle &= x_i Y |e_i\rangle \end{aligned} \right\} [X, Y]_- = 0 \Rightarrow \overbrace{XY |e_i\rangle}^{\propto |e_i\rangle} = x_i \overbrace{Y |e_i\rangle}^{\propto |e_i\rangle}$$