

Κβαντομηχανική II

Διάλεξη 5

31 Οκτωβρίου 2025

Σπύρος Τσέρκης



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

DEMOCRITUS
UNIVERSITY
OF THRACE

Χρονική Εξέλιξη Κβαντικής Κατάστασης

Η χρονική εξέλιξη μιας κβαντικής κατάστασης περιγράφεται από έναν μοναδιακό τελεστή

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(t_0)\rangle$$

Η κανονικοποίηση της κατάστασης διατηρείται κατά τη διάρκεια της χρονικής εξέλιξης:

$$\|U(t) |\psi(t_0)\rangle\| = \sqrt{\langle\psi(t_0)| U^\dagger(t) U(t) |\psi(t_0)\rangle} = \sqrt{\langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle} = 1$$

Παράδειγμα. Αν έχουμε την κβαντική κατάσταση $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle$ που εξελίσσεται με βάση τον τελεστή

$X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$ ποια είναι η τελική κατάσταση?

$$\begin{aligned} X |\psi\rangle &= (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \left(\sqrt{\frac{1}{3}} |0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle \right) \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} |0\rangle \langle 1|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |0\rangle \langle 1|1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1\rangle \langle 0|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle \langle 0|1\rangle \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} |0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1\rangle \end{aligned}$$

Εξίσωση και Εικόνα του Schrödinger

Έστω $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}tH}$ όπου H είναι η Χαμιλτονιανή του κβαντικού συστήματος και $\hbar$ η σταθερά του Planck.

Για κάθε Ερμιτιανό τελεστή H ο τελεστής $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}tH}$ είναι μοναδιακός:

$$U(t)^\dagger = \left(e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\right)^\dagger = e^{\frac{i}{\hbar}tH^\dagger} = e^{\frac{i}{\hbar}tH}$$

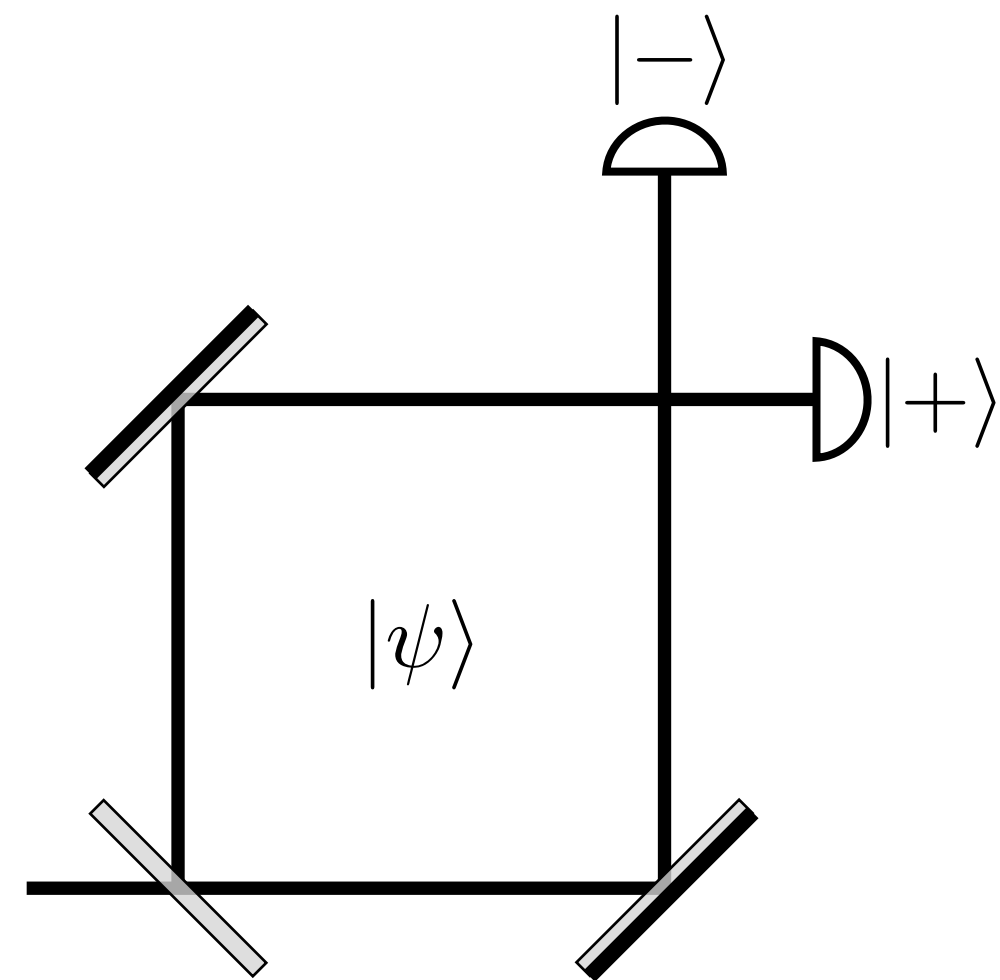
$$\text{Άρα } U(t)U(t)^\dagger = e^{\frac{i}{\hbar}tH}e^{-\frac{i}{\hbar}tH} = e^O = \exp\left\{\sum_i 0|e_i\rangle\langle e_i|\right\} = \sum_i e^0|e_i\rangle\langle e_i| = \sum_i 1 \cdot |e_i\rangle\langle e_i| = I$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(t_0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(t_0)\rangle$ και παίρνουμε την εξίσωση του Schrödinger

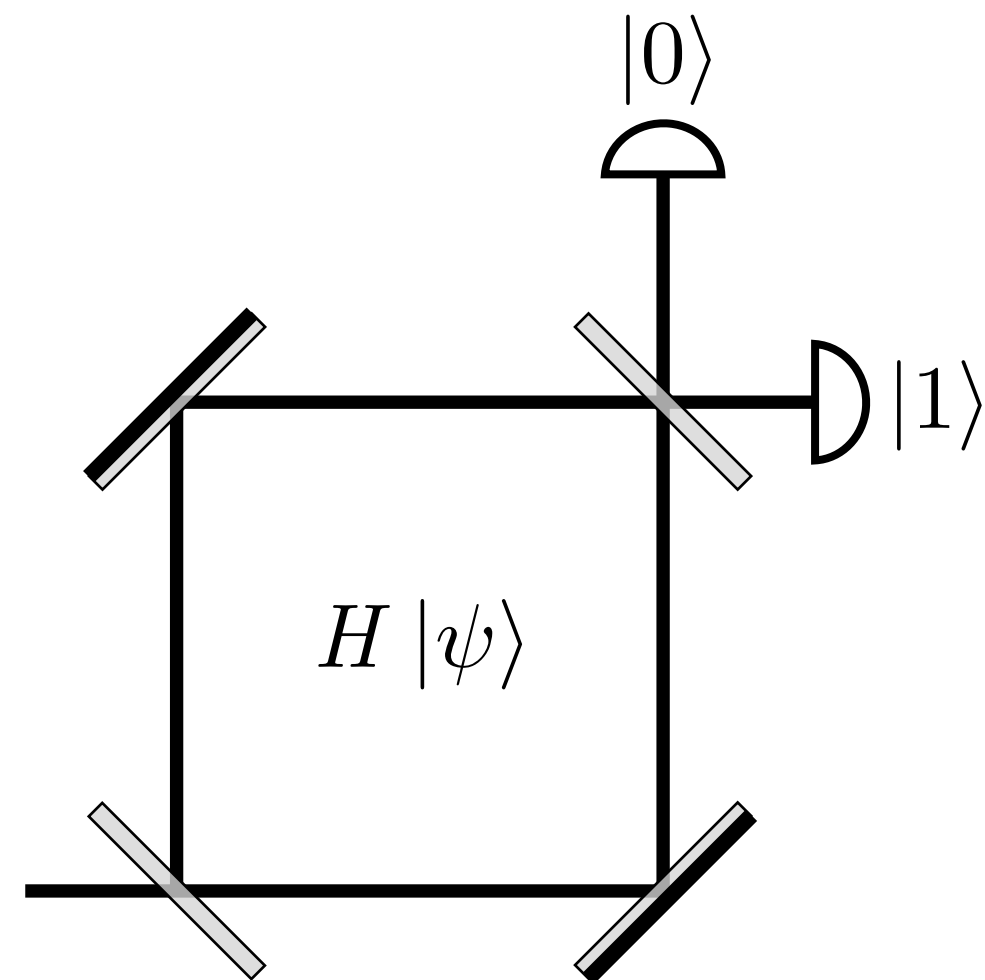
$$\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar}He^{-\frac{i}{\hbar}tH}|\psi(t_0)\rangle = -\frac{i}{\hbar}H|\psi(t)\rangle \Leftrightarrow \boxed{i\hbar\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H|\psi(t)\rangle}$$

Στην εικόνα του Schrödinger η κατάσταση αλλάζει με τον χρόνο ενώ οι ιδιότητες παραμένουν σταθερές.

Κβαντικές Καταστάσεις



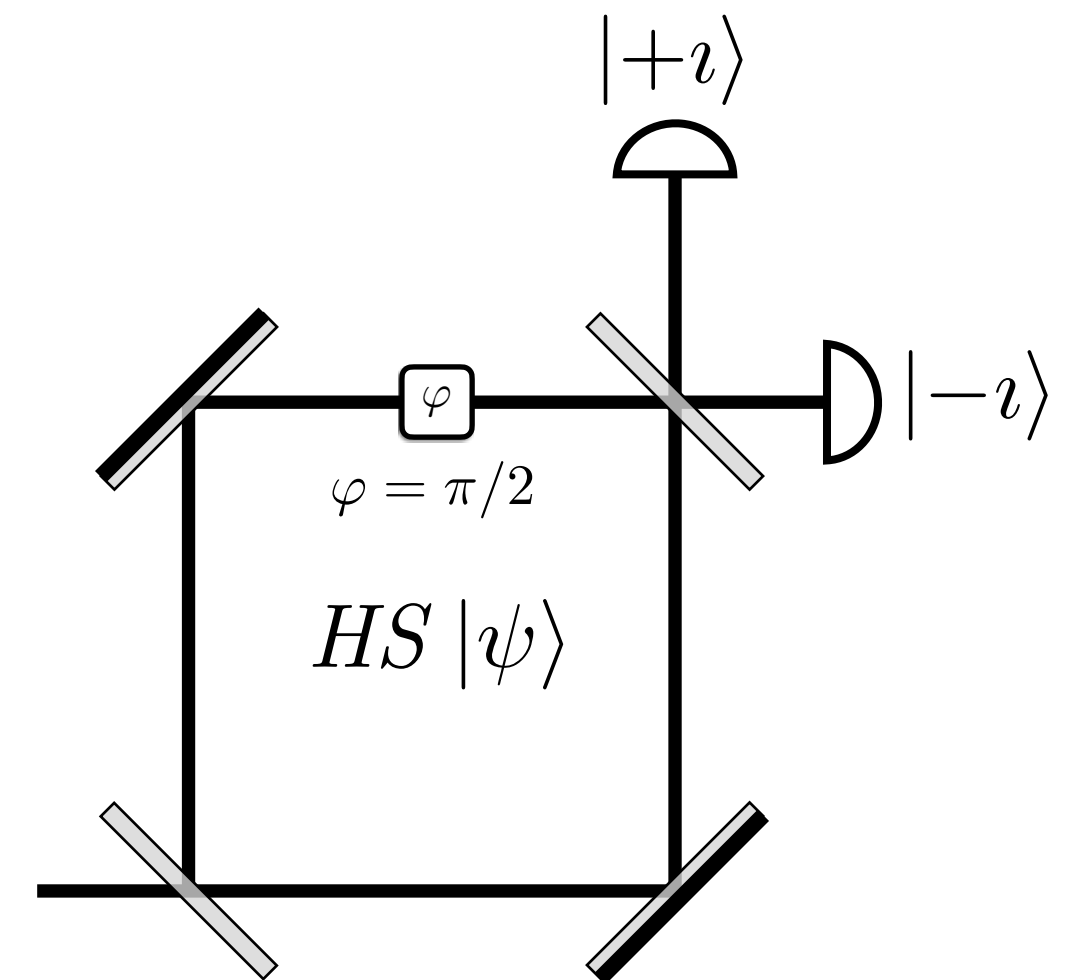
$|+\rangle$
 $|-\rangle$



$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle +| + |1\rangle\langle -|$$

$$H|+\rangle = |0\rangle$$

$$H|-\rangle = |1\rangle$$



$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| + i|1\rangle\langle 1|$$

$$HS = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} = |+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|$$

$$HS|+\rangle = |+\rangle$$

$$HS|-\rangle = |-\rangle$$

Σειρά των πράξεων: $|\psi\rangle \rightarrow A|\psi\rangle \rightarrow BA|\psi\rangle \rightarrow CBA|\psi\rangle$

Εικόνα του Heisenberg

Στην εικόνα του Heisenberg η κατάσταση μένει σταθερή στον χρόνο ενώ οι ιδιότητες αλλάζουν.

Η αναμενόμενη τιμή μιας ιδιότητας στο πέρασμα του χρόνου πρέπει να είναι ίδια και στις δύο εικόνες.

Αναμενόμενη τιμή στην εικόνα του Schrödinger: $\langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | A(t_0) | \psi(t) \rangle$

Δεδομένης της σχέσης $|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(t_0)\rangle$ έχουμε $\langle \psi(t_0) | U^\dagger(t) A(t_0) U(t) | \psi(t_0) \rangle = \langle \psi | A(t) | \psi \rangle$

Άρα η ιδιότητα αλλάζει στον χρόνο ως εξής: $A(t) = U^\dagger(t) A(t_0) U(t)$

Άρα έχουμε τη σχέση μεταξύ των δύο εικόνων: $A_H(t) = U^\dagger(t) A_S U(t)$

Εξίσωση Heisenberg

Δεδομένου πως $|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(t_0)\rangle$ έχουμε

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \Rightarrow i\hbar \frac{dU(t)}{dt} |\psi(t_0)\rangle = HU(t) |\psi(t_0)\rangle \Leftrightarrow \frac{dU(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} HU(t)$$

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle\psi(t)| = \langle\psi(t)| H \Rightarrow -i\hbar \langle\psi(t_0)| \frac{dU^\dagger(t)}{dt} = \langle\psi(t_0)| U^\dagger(t) H \Leftrightarrow \frac{dU^\dagger(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} U^\dagger(t) H$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση $A_H(t) = U^\dagger(t) A_S U(t)$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \boxed{\frac{dA_H(t)}{dt}} &= \frac{dU^\dagger(t)}{dt} A_S U(t) + U^\dagger(t) \frac{\partial A_S}{\partial t} U(t) + U^\dagger(t) A_S \frac{dU(t)}{dt} \\ &= \frac{i}{\hbar} U^\dagger(t) H A_S U(t) + U^\dagger(t) \frac{\partial A_S}{\partial t} U(t) - \frac{i}{\hbar} U^\dagger(t) A_S H U(t) \\ &= \frac{i}{\hbar} U^\dagger(t) [H, A_S]_- U(t) + U^\dagger(t) \frac{\partial A_S}{\partial t} U(t) \\ &= \boxed{\frac{i}{\hbar} [H, A_H]_- + \frac{\partial A_H}{\partial t}} \end{aligned}$$

Χρονική Εξέλιξη Αναμενόμενων Τιμών

Παραγωγίζοντας τη σχέση $\langle A \rangle = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle$ παίρνουμε:

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \left(\frac{d\langle \psi(t) |}{dt} \right) A | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \frac{\partial A}{\partial t} | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | A \left(\frac{d | \psi(t) \rangle}{dt} \right)$$

$$i\hbar \frac{d | \psi(t) \rangle}{dt} = H | \psi(t) \rangle \Leftrightarrow \frac{d | \psi(t) \rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H | \psi(t) \rangle$$

$$-i\hbar \frac{d \langle \psi(t) |}{dt} = \langle \psi(t) | H \Leftrightarrow \frac{d \langle \psi(t) |}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | H$$

Η παράγωγος της αναμενόμενης τιμής είναι:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle A \rangle}{dt} &= \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | HA | \psi(t) \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | AH | \psi(t) \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | [H, A] | \psi(t) \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle \end{aligned}$$

Η αναμενόμενη τιμή ενός τελεστή είναι σταθερή στο χρόνο αν: (i) δεν εξαρτάται από το χρόνο και (ii) μετατίθεται με τη Χαμιλτονιανή, π.χ. η ενέργεια ενός απομονωμένου συστήματος διατηρείται.

Θεώρημα του Ehrenfest

Η κλασική φυσική είναι υποπερίπτωση της κβαντικής φυσικής.

Για τη Χαμιλτονιανή $H = \frac{P^2}{2m} + V(X, t)$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle X \rangle &= \frac{1}{i\hbar} \langle [X, H]_- \rangle \\
 &= \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[X, \frac{P^2}{2m} + V(X, t) \right]_- \right\rangle \quad [X, V(X, t)]_- = 0 \\
 &= \frac{1}{2im\hbar} \langle [X, P^2]_- \rangle \quad [X, P^2]_- = [X, PP]_- = [X, P]_- P + P [X, P]_- = 2i\hbar P \\
 &= \frac{1}{m} P
 \end{aligned}$$

$[X, P]_- = i\hbar I$

$[X, YZ]_- = [X, Y]_- Z + Y [X, Z]_-$

Κατά αντιστοιχία του ορισμού της ορμής στην κλασική φυσική: $\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \Leftrightarrow p = m \frac{dx}{dt} = mv$

Θεώρημα του Ehrenfest

Η κλασική φυσική είναι υποπερίπτωση της κβαντικής φυσικής.

Για τη Χαμιλτονιανή $H = \frac{P^2}{2m} + V(X, t)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle P \rangle &= \frac{1}{i\hbar} \langle [P, H]_- \rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[P, \frac{P^2}{2m} + V(X, t) \right]_- \right\rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar} \langle [P, V(X, t)]_- \rangle & [P, V(X, t)]_- &= -i\hbar \nabla V(X, t) \\ &= -\langle \nabla V(X, t) \rangle\end{aligned}$$

Κατά αντιστοιχία του ορισμού της δύναμης στην κλασική φυσική: $\frac{dp}{dt} = -\nabla V(x, t) = F$