

Κβαντομηχανική II

Διάλεξη 6

7 Νοεμβρίου 2025

Σπύρος Τσέρκης

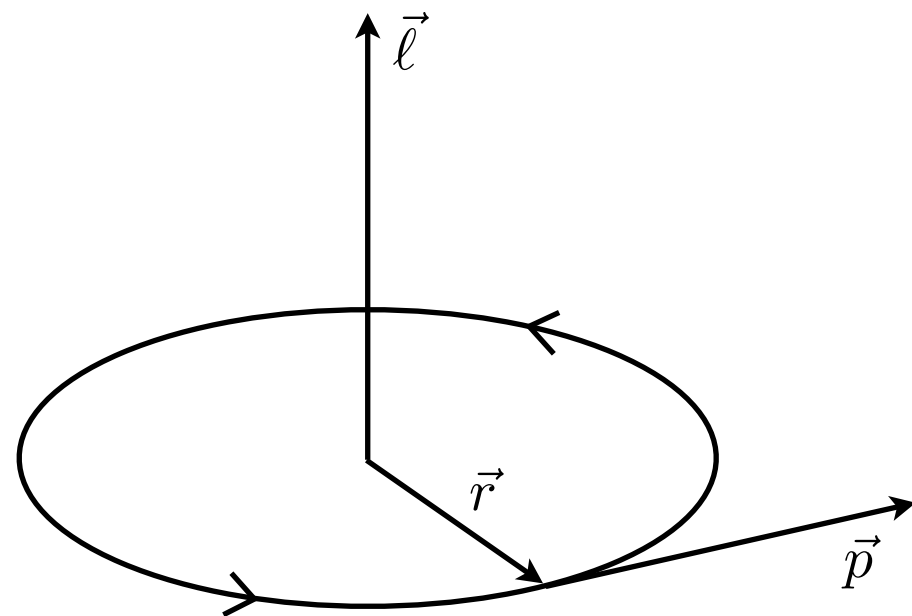


ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

DEMOCRITUS
UNIVERSITY
OF THRACE

Στροφορμή

Στην κλασική φυσική η στροφορμή ορίζεται ως: $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$



$$\vec{\ell} = \begin{bmatrix} \ell_x \\ \ell_y \\ \ell_z \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \ell_x &= yp_z - zp_y \\ \ell_y &= zp_x - xp_z \\ \ell_z &= xp_y - yp_x \end{aligned}$$

$$\|\vec{\ell}\| = \sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2}$$

$$\|\vec{\ell}\|^2 = \ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2$$

Το $\|\vec{\ell}\|^2$ είναι το μέτρο της στροφορμής, το οποίο είναι ανάλογο της περιστροφικής κινητικής ενέργειας.

Στην κβαντική φυσική η στροφορμή ορίζεται ως: $J = R \times P$

Διανυσματικός τελεστής: $J = \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} J_x &= YP_z - ZP_y \\ J_y &= ZP_x - XP_z \\ J_z &= XP_y - YP_x \end{aligned}$

Βαθμωτός τελεστής: $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$

Κοινά Ιδιοδιανύσματα Τροχιακής Στροφορμής

Σχέσεις μεταθετών:

$$\begin{array}{lll} [X, P_x]_- = i\hbar I & [X, P_y]_- = 0 & [X, P_z]_- = 0 \\ [Y, P_y]_- = i\hbar I & [Y, P_x]_- = 0 & [Y, P_z]_- = 0 \\ [Z, P_z]_- = i\hbar I & [Z, P_x]_- = 0 & [Z, P_y]_- = 0 \end{array}$$

Δείτε και παράδειγμα 5.1

$$\begin{array}{ll} [J_x, J_y]_- = i\hbar J_z & [J^2, J_x]_- = 0 \\ [J_y, J_z]_- = i\hbar J_x & [J^2, J_y]_- = 0 \\ [J_z, J_x]_- = i\hbar J_y & [J^2, J_z]_- = 0 \end{array}$$

Η απόδειξη στις σχέσεις (5.7) και (5.21) στο βιβλίο

Δείτε και παράδειγμα 5.2

Οι τελεστές J_i και J^2 μετατίθενται, άρα έχουν ένα σύνολο κοινών ιδιοδιανυσμάτων.

$$\left. \begin{array}{l} J^2 |\psi\rangle = \hbar^2 a |\psi\rangle \\ J_z |\psi\rangle = \hbar b |\psi\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} J^2 |a, b\rangle = \hbar^2 a |a, b\rangle \\ J_z |a, b\rangle = \hbar b |a, b\rangle \end{array} \quad \langle a', b' | a, b \rangle = \delta_{a',a} \delta_{b',b}$$

Ο παράγοντας $\hbar$ εισάγεται έτσι ώστε τα a και b να είναι αδιάστατα.

Τελεστές Αναβίβασης και Υποβίβασης

Ορίζουμε τους τελεστές αναβίβασης και υποβίβασης: $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$

Για τους οποίους ισχύει: $J_+^{\dagger} = J_x^{\dagger} - iJ_y^{\dagger} = J_x - iJ_y = J_-$ και $J_-^{\dagger} = J_x^{\dagger} + iJ_y^{\dagger} = J_x + iJ_y = J_+$

Αντίστοιχα έχουμε τις σχέσεις: $J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$ και $J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$

Σχέσεις μεταθετών: $[J^2, J_{\pm}]_- = 0$ $[J_+, J_-]_- = 2\hbar J_z$ $[J_z, J_{\pm}]_- = \pm\hbar J_{\pm}$

Επίσης λαμβάνουμε τις σχέσεις:

$J_+ J_- = (J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y)$	$J_- J_+ = (J_x - iJ_y)(J_x + iJ_y)$
$= J_x^2 - iJ_x J_y + iJ_y J_x + J_y^2$	$= J_x^2 + iJ_x J_y - iJ_y J_x + J_y^2$
$= J_x^2 - i[J_x, J_y]_- + J_y^2$	$= J_x^2 + i[J_x, J_y]_- + J_y^2$
$= J_x^2 + J_y^2 + \hbar J_z$	$= J_x^2 + J_y^2 - \hbar J_z$
$= J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$	$= J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$

Ιδιοτιμές Στροφορμής

$$\begin{aligned} [J_z, J_{\pm}]_{-} = \pm \hbar J_{\pm} &\Leftrightarrow J_z J_{\pm} - J_{\pm} J_z = \pm \hbar J_{\pm} \Leftrightarrow J_z J_{\pm} = J_{\pm} J_z \pm \hbar J_{\pm} \Rightarrow J_z J_{\pm} |a, b\rangle = (J_{\pm} J_z \pm \hbar J_{\pm}) |a, b\rangle \\ &= J_{\pm} J_z |a, b\rangle \pm \hbar J_{\pm} |a, b\rangle \\ &= \hbar b J_{\pm} |a, b\rangle \pm \hbar J_{\pm} |a, b\rangle \\ &= \hbar(b \pm 1) J_{\pm} |a, b\rangle \end{aligned}$$

Άρα η $J_{\pm} |a, b\rangle$ είναι μια ιδιοκατάσταση του J_z με ιδιοτιμές $\hbar(b \pm 1)$

Αφού J_z και J^2 μετατίθενται, η $J_{\pm} |a, b\rangle$ είναι ιδιοκατάσταση και του J^2

$$[J^2, J_{\pm}]_{-} = 0 \Leftrightarrow J^2 J_{\pm} - J_{\pm} J^2 = 0 \Leftrightarrow J^2 J_{\pm} = J_{\pm} J^2 \Rightarrow J^2 J_{\pm} |a, b\rangle = J_{\pm} J^2 |a, b\rangle = \hbar^2 a J_{\pm} |a, b\rangle$$

Άρα όταν ο $J_{\pm}$ δράσει στην $|a, b\rangle$ επηρεάζει μόνο την δεύτερη παράμετρο. Θέτουμε $J_{\pm} |a, b\rangle = c_{\pm} |a, b \pm 1\rangle$ σταθερά

$$\text{Επιβεβαίωση: } J_z J_{\pm} |a, b\rangle = \hbar(b \pm 1) J_{\pm} |a, b\rangle \Leftrightarrow \cancel{c_{\pm}} J_z |a, b \pm 1\rangle = \cancel{c_{\pm}} \hbar(b \pm 1) |a, b \pm 1\rangle$$

Ιδιοτιμές Στροφορμής

Γνωρίζουμε πως $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \Leftrightarrow J^2 - J_z^2 = J_x^2 + J_y^2 \geq 0$

Άρα $\langle a, b | J^2 - J_z^2 | a, b \rangle = \hbar^2(a - b^2) \geq 0 \Rightarrow a \geq b^2$

Ο b έχει κάποιο όριο, $b_{\max}$, άρα πρέπει να υπάρχει κατάσταση $|a, b_{\max}\rangle$ η οποία δε μπορεί να αυξηθεί περαιτέρω

$$J_+ |a, b_{\max}\rangle = 0 \Rightarrow J_- J_+ |a, b_{\max}\rangle = 0$$

$$J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z \Rightarrow (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) |a, b_{\max}\rangle = \hbar^2(a - b_{\max}^2 - b_{\max}) |a, b_{\max}\rangle = 0$$

$$a - b_{\max}^2 - b_{\max} = 0 \Leftrightarrow a = b_{\max}^2 + b_{\max} = b_{\max}(b_{\max} + 1)$$

Αντίστοιχα

$$J_- |a, b_{\min}\rangle = 0 \Rightarrow J_+ J_- |a, b_{\min}\rangle = 0$$

$$J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z \Rightarrow J^2 - J_z^2 + \hbar J_z |a, b_{\min}\rangle = \hbar^2(a - b_{\min}^2 + b_{\min}) |a, b_{\min}\rangle = 0$$

$$a - b_{\min}^2 + b_{\min} = 0 \Leftrightarrow a = b_{\min}^2 - b_{\min} = b_{\min}(b_{\min} - 1)$$

Από το οποίο συμπεραίνουμε πως: $b_{\max} = -b_{\min} \Rightarrow -b_{\max} \leq b \leq b_{\max}$

Ιδιοτιμές Στροφορμής

Αν υποθέσουμε πως εφαρμόσαμε n φορές τον τελεστή αναβάισης για όλο το φάσμα έχουμε

$$b_{\max} = b_{\min} + n \Leftrightarrow b_{\max} = -b_{\max} + n \Leftrightarrow b_{\max} = \frac{n}{2}$$

Θέτοντας $j = b_{\max}$ και $m = b$ οι ιδιοτιμές του J^2 είναι: $a = j(j+1)$, ενώ $-j \leq m \leq j$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} J^2 |j, m\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle \\ J_z |j, m\rangle &= \hbar m |j, m\rangle \end{aligned}$$

όπου: $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ και $m = -j, -(j-1), \dots, j-1, j$

Άρα ο αριθμός j μπορεί να είναι ακέραιος (άρτιος ή περιττός) ή το μισό ενός περιττού αριθμού.

Άρα για κάθε j υπάρχουν $2j+1$ τιμές του m

Για παράδειγμα, αν $j = 1$ τότε το m λαμβάνει τις τιμές: $-1, 0, 1$

Για παράδειγμα, αν $j = \frac{5}{2}$ τότε το m λαμβάνει τις τιμές: $-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$

Ιδιοτιμές των Τελεστών Αναβίβασης και Υποβίβασης

Για τον τελεστή αναβίβασης έχουμε $J_{\pm} |j, m\rangle = c_{\pm} |j, m \pm 1\rangle$ άρα

$$\begin{aligned}
 \|J_{\pm} |j, m\rangle\|^2 &= \langle j, m | J_{\pm}^{\dagger} J_{\pm} |j, m\rangle \\
 &= \langle j, m | J_{\mp} J_{\pm} |j, m\rangle \\
 &= \langle j, m | (J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z) |j, m\rangle \\
 &= \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 \mp \hbar^2 m
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \|J_{\pm} |j, m\rangle\|^2 &= \langle j, m | J_{\pm}^{\dagger} J_{\pm} |j, m\rangle \\ &= \langle j, m | J_{\mp} J_{\pm} |j, m\rangle \\ &= \langle j, m | (J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z) |j, m\rangle \\ &= \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 \mp \hbar^2 m \end{aligned}} \right\} \Rightarrow |c_{\pm}|^2 = \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 \mp \hbar^2 m \Rightarrow c_{\pm} = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}$$

η τιμή έγινε πραγματική γιατί απορροφούμε τη φάση στην κατάσταση $|j, m \pm 1\rangle$

Άρα έχουμε: $J_{\pm} |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle$

Ιδιοτιμές των Συνιστωσών της Στροφορμής

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \Rightarrow J_x |j, m\rangle = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) |j, m\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} \left[\sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle + \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y &= \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \Rightarrow J_y |j, m\rangle = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) |j, m\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2i} \left[\sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle - \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle \right] \end{aligned}$$

Άρα οι αναμενόμενες τιμές των J_x και J_y είναι:

$$\langle j, m | J_x | j, m \rangle = 0$$

$$\langle j, m | J_y | j, m \rangle = 0$$

Δείτε και πρόβλημα 5.1

Ολική και Σχετική Φάση Κατάστασης

Έστω πως έχουμε μια κατάσταση $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$

Μετά την επίδραση της ολικής φάσης θα έχουμε $|\psi'\rangle = e^{i\varphi}(a|0\rangle + b|1\rangle) = ae^{i\varphi}|0\rangle + be^{i\varphi}|1\rangle$

Μετά την επίδραση της σχετικής φάσης θα έχουμε $|\psi''\rangle = a|0\rangle + be^{i\varphi}|1\rangle$

Ποια η πιθανότητα να πάρουμε την ιδιοτιμή 1 αν μετρήσουμε την ιδιότητα $X = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|$?

Χωρίς την φάση έχουμε:

$$|\langle+|\psi\rangle|^2 = \left| \left(\frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}} \right) (a|0\rangle + b|1\rangle) \right|^2 = \left| \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{|a+b|^2}{2}$$

Με την ολική φάση έχουμε:

$$|\langle+|\psi'\rangle|^2 = \left| \left(\frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}} \right) (ae^{i\varphi}|0\rangle + be^{i\varphi}|1\rangle) \right|^2 = \left| \frac{ae^{i\varphi}}{\sqrt{2}} + \frac{be^{i\varphi}}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{|(a+b)e^{i\varphi}|^2}{2} = \frac{|a+b|^2}{2}$$

Με την σχετική φάση έχουμε:

$$|\langle+|\psi''\rangle|^2 = \left| \left(\frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}} \right) (|0\rangle + be^{i\varphi}|1\rangle) \right|^2 = \left| \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{be^{i\varphi}}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{|a + be^{i\varphi}|^2}{2}$$