Κβαντομηχανική II

Διάλεξη 8

21 Νοεμβρίου 2025

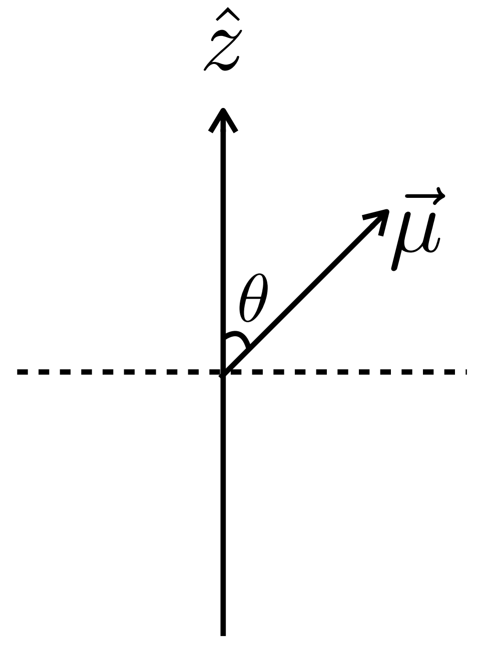
Σπύρος Τσέρκης

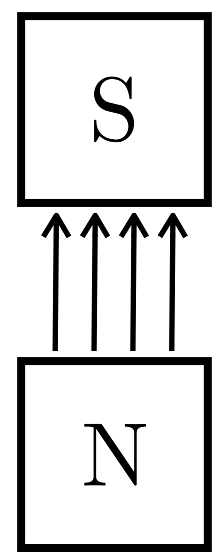
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
DEMOCRITUS UNIVERSITY OF THRACE

Κλασικό Μαγνητικό Δίπολο

Η δύναμη που ασκείται σε ένα μαγνητικό δίπολο λόγω του μαγνητικού πεδίου είναι:

$$\vec{\mathrm{F}} = -\nabla \mathrm{U} = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{\mathrm{B}})$$



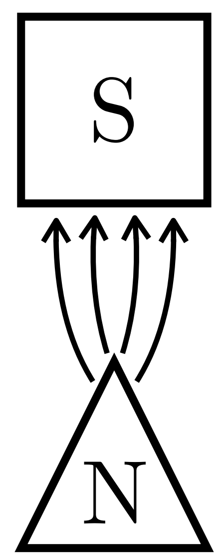


Έστω πως το μαγνητικό πεδίο είναι ομοιογενές, τότε:

$$\vec{\mathrm{B}} = \mathrm{B}_z \hat{z} \Rightarrow \vec{\mu} \cdot \vec{\mathrm{B}} = \mu \cos\theta \mathrm{B}_z \Rightarrow \mathrm{F}_z = 0$$

Εάν το πεδίο είναι ανομοιογενές τότε:

$$\vec{\mathrm{B}} = \mathrm{B}(z)\hat{z} \Rightarrow \vec{\mu} \cdot \vec{\mathrm{B}} = \mu \cos\theta \mathrm{B}(z) \Rightarrow \mathrm{F}_z = \mu \cos\theta \frac{\mathrm{d}B(z)}{\mathrm{d}z}$$



Άρα ένα ανομοιογενές πεδίο ασκεί δύναμη και εκτρέπει το μαγνητικό δίπολο με συνεχές τρόπο.

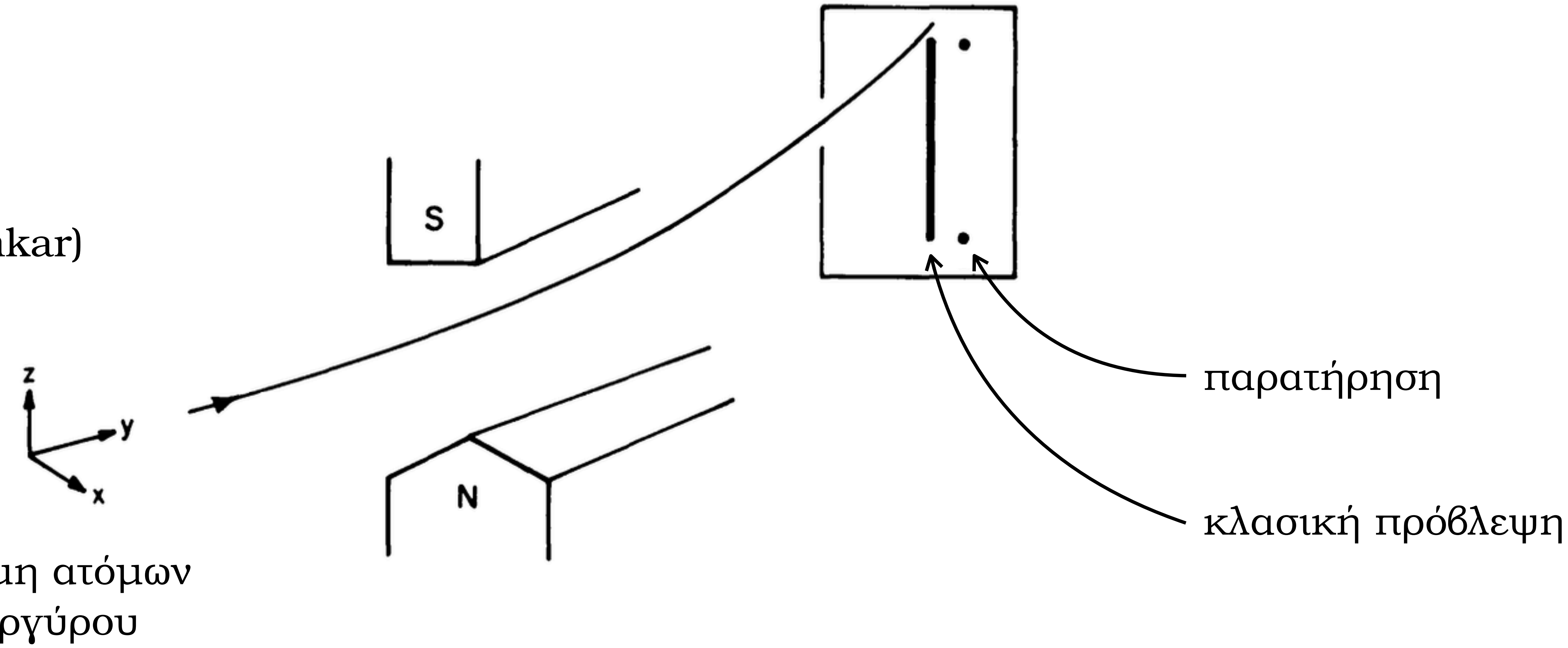
Πείραμα Stern Gerlach

Δέσμη ατόμων αργύρου περνάν μέσα από ένα ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο και εκτρέπονται άρα λειτουργούν ως μαγνητικό δίπολο.

Το δίπολο οφείλεται στο ηλεκτρόνιο της εξωτερικής στοιβάδας των ατόμων αργύρου.

Με βάση την κλασική φυσική, περιμένουμε μια συνεχή κατανομή πάνω στην οθόνη ανάλογα με την γωνία που εξέρχονται από την πηγή, παρατηρούμε όμως πως εκτρέπονται σε δύο διακριτές θέσεις.

(εικόνα από το βιβλίο του Shankar)



Το ηλεκτρόνιο εκτός από την τροχιακή στροφορμή διαθέτει και μια εγγενή στροφορμή η οποία δεν έχει καμία σχέση με τους χωρικούς βαθμούς ελευθερίας. Αυτή ονομάζεται ιδιοστροφορμή ή σπιν.

Ιδιοτιμές και Ιδιοσυναρτήσεις Σπιν

Κατά αναλογία της γενικής θεωρίας της στροφορμής, έχουμε για τον διανυσματικό τελεστή του σπιν S

$$S^2 |s, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s, m_s\rangle$$

$$S_z |s, m_s\rangle = \hbar m_s |s, m_s\rangle \qquad m_s = -s, -s+1, \cdots, s-1, s$$

Και τις σχέσεις μεταθετών: $[S_x, S_y]_- = \imath\hbar S_z$

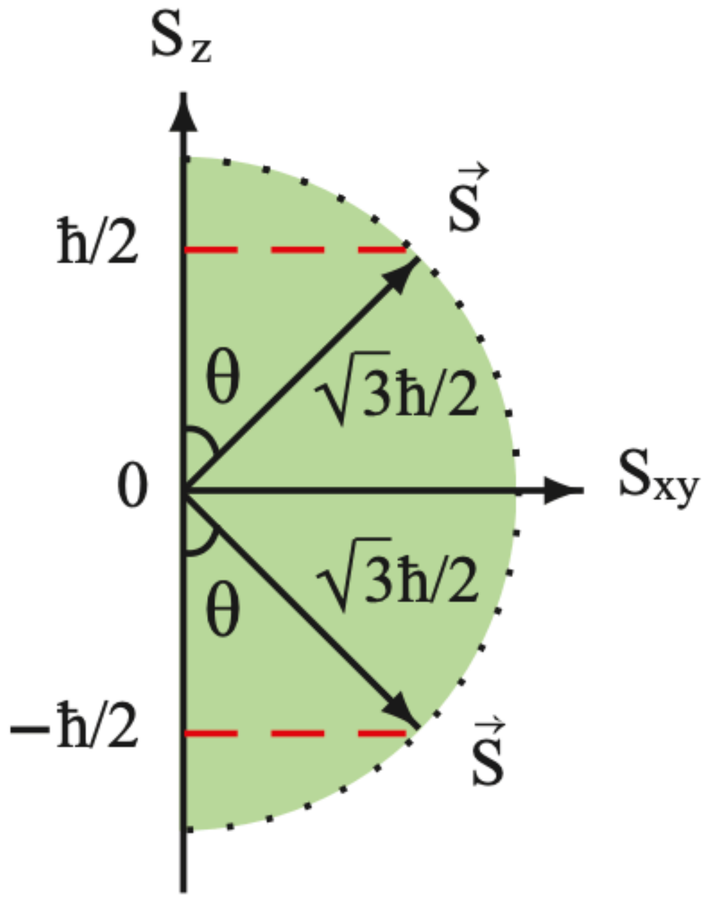
$$[S_y, S_z]_- = \imath\hbar S_x$$

$$[S_z, S_x]_- = \imath\hbar S_y$$

Αντίστοιχα έχουμε: $S_\pm |s, m_s\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}\, |s, m_s \pm 1\rangle$

$$S_\pm = S_x \pm \imath S_y$$

Εφόσον στο πείραμα Stern-Gerlach
παρατηρήθηκαν δύο συνιστώσες πρέπει να έχουμε: $2s + 1 = 2 \Leftrightarrow s = \frac{1}{2} \Rightarrow m_s = \pm\frac{1}{2}$



(εικόνα από το βιβλίο του Zettili)

Κβαντικό Μαγνητικό Δίπολο

Το ανομοιογενές πεδίο είναι ίσο με $\vec{\mathrm{B}} = \mathrm{B}(z)\hat{z}$

Η μαγνητική ροπή του σπιν είναι ίση με $\vec{M} = \gamma \vec{S}$, όπου $\gamma = -g\dfrac{e}{2m_e c}$

Όπου g ο <u>παράγοντας Lande</u> ή γυρομαγνητικός λόγος, που προσδιορίζεται πειραματικά.

Η ενέργεια αλληλεπίδρασης, Χαμιλτονιανή, του μαγνητικού πεδίου με το ηλεκτρόνιο γράφεται ως

$$\begin{aligned} H &= -\vec{M}\cdot\vec{\mathrm{B}} \\ &= -\gamma\vec{S}\cdot\vec{\mathrm{B}} \\ &= g\frac{e}{2m_e c}\vec{S}\cdot\vec{\mathrm{B}} \\ &= g\frac{e}{2m_e c}S_z\mathrm{B}(z) \quad \to g\frac{e\hbar}{2m_e c}m_s\mathrm{B}(z) \\ &\qquad\qquad\qquad\quad = g\mu_{\mathrm{B}}m_s\mathrm{B}(z) \end{aligned}$$

τελεστής του S στον άξονα z.

διότι $s_z = \hbar m_s$

Επίσης ορίσαμε τη <u>μαγνητόνη του Bohr</u> $\mu_{\mathrm{B}} = \dfrac{e\hbar}{2m_e c}$

Άρα η δύναμη που ασκείται σε ένα ηλεκτρόνιο είναι ίση με $\mathrm{F}_z = -\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}z} = -g\mu_{\mathrm{B}}m_s\dfrac{\mathrm{d}B(z)}{\mathrm{d}z}$

Ο παράγοντας Lande g βρέθηκε να είναι ίσος με 2.

Σωματίδιο Με Σπιν 1/2

Για ένα σωματίδιο με σπιν $s = \dfrac{1}{2}$ ο κβαντικός αριθμός m_s λαμβάνει δύο τιμές: $m_s = \dfrac{1}{2}$ και $m_s = -\dfrac{1}{2}$

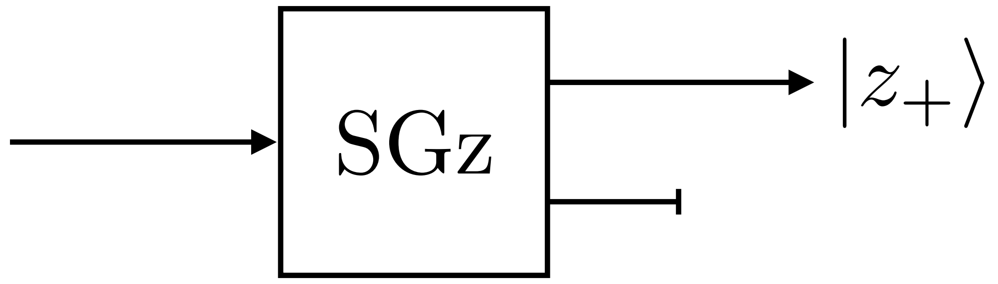
Το σωματίδιο συνεπώς μπορεί να βρεθεί στις παρακάτω δύο καταστάσεις: $|s, m_s\rangle = \left|\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\rangle$ και $|s, m_s\rangle = \left|\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right\rangle$

Για τους τελεστές S^2 και S_z έχουμε:

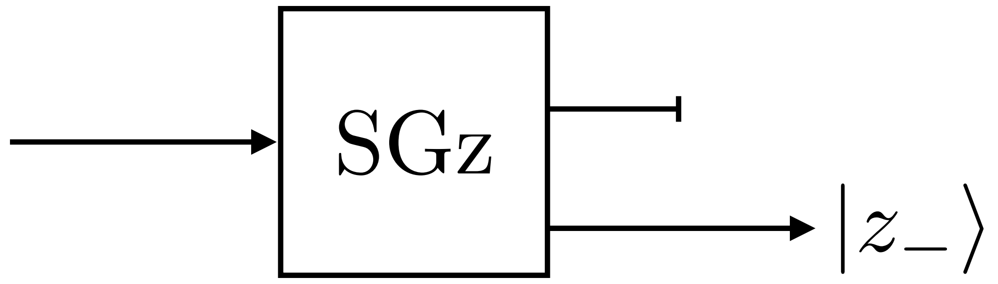
$$S^2 = \begin{bmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \mid S^2 \mid \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \mid S^2 \mid \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \mid S^2 \mid \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \mid S^2 \mid \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{bmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4} I$$

$$S_z = \begin{bmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \mid S_z \mid \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \mid S_z \mid \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \mid S_z \mid \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \mid S_z \mid \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \Lambda_3$$

Ιδιοτιμή: $s_z = \dfrac{\hbar}{2}$ Ιδιοδιάνυσμα: $\left|\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |z_+\rangle = |0\rangle$



Ιδιοτιμή: $s_z = -\dfrac{\hbar}{2}$ Ιδιοδιάνυσμα: $\left|\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |z_-\rangle = |1\rangle$

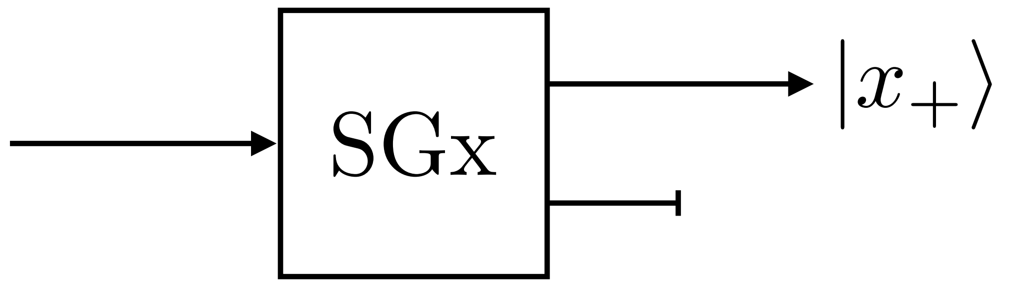


Σωματίδιο Με Σπιν 1/2

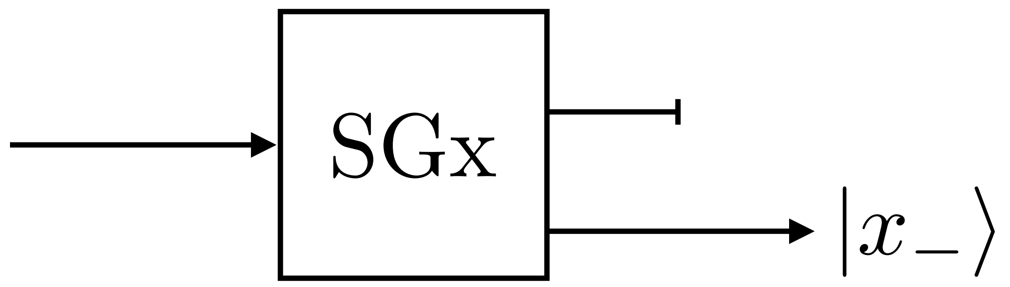
Για τον τελεστή S_x έχουμε:

$$S_x = \begin{bmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \mid S_x \mid \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \mid S_x \mid \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \mid S_x \mid \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \mid S_x \mid \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \Lambda_1$$

Ιδιοτιμή: $s_x = \frac{\hbar}{2}$ Ιδιοδιάνυσμα: $\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = |+x\rangle = |+\rangle$



Ιδιοτιμή: $s_x = -\frac{\hbar}{2}$ Ιδιοδιάνυσμα: $\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = |-x\rangle = |-\rangle$



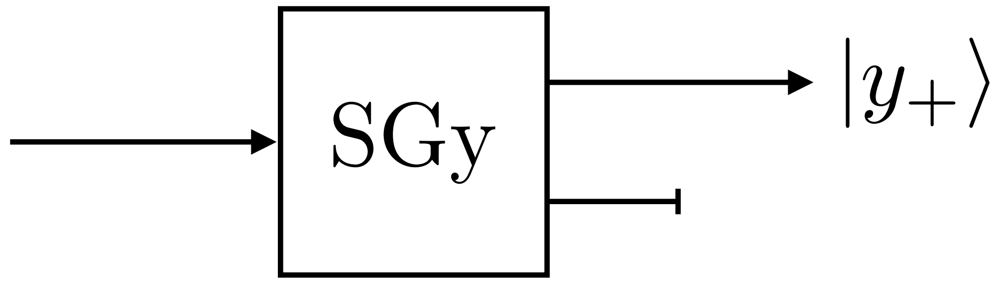
Σωματίδιο Με Σπιν 1/2

Για τον τελεστή S_y έχουμε:

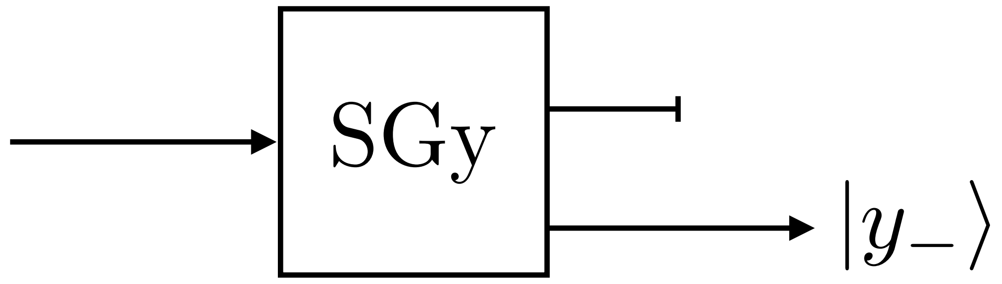
$$S_y = \begin{bmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \mid S_y \mid \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \mid S_y \mid \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \mid S_y \mid \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \mid S_y \mid \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \Lambda_2$$

Άρα συνολικά έχουμε: $\vec{S} = \dfrac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \end{bmatrix}$

Ιδιοτιμή: $s_y = \dfrac{\hbar}{2}$ Ιδιοδιάνυσμα: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \left[\left| \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \right\rangle + \imath \left| \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2} \right\rangle \right] = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \imath \end{bmatrix} = |y_+\rangle = |+\imath\rangle$



Ιδιοτιμή: $s_y = -\dfrac{\hbar}{2}$ Ιδιοδιάνυσμα: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \left[\left| \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \right\rangle - \imath \left| \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2} \right\rangle \right] = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\imath \end{bmatrix} = |y_-\rangle = |-\imath\rangle$

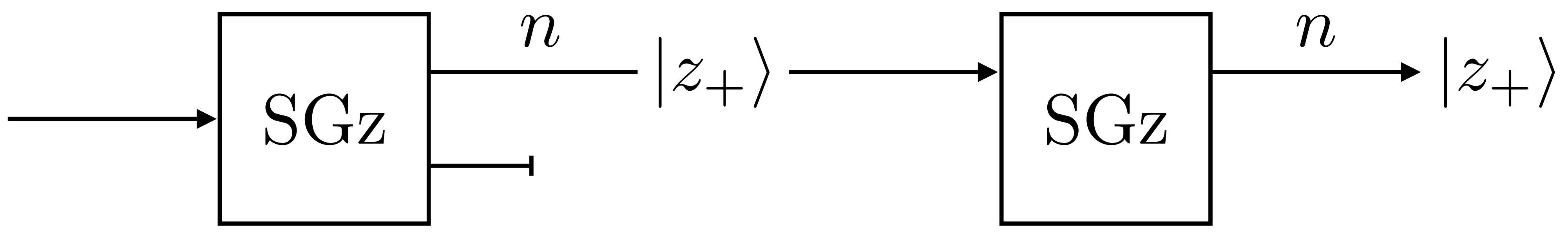


Δείτε και παράδειγμα 5.4

Δείτε και τα προβλήματα 5.4, 5.5, 5.6, 5.13

Πολλαπλές Μετρήσεις Σπιν 1/2 — Πείραμα 1

Σωματίδια με σπιν 1/2 στέλνονται μέσα από δύο συνεχόμενες συσκευές Stern-Gerlach (SG) προσανατολισμένες στον άξονα z.

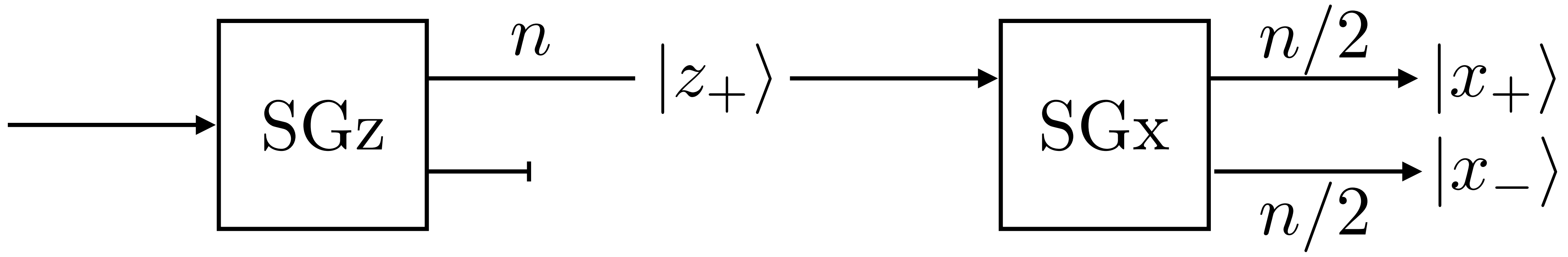


Δε γνωρίζουμε την κβαντική κατάσταση των σωματιδίων πριν μπουν στην πρώτη συσκευή SGz αλλά τα μισά από όσα βγουν έχουν την ιδιοτιμή $+\hbar/2$ και μπορούμε να τα χαρακτηρίσουμε ως $|z_+\rangle$.

Όσα σωματίδια μπουν στη δεύτερη συσκευή SGz, τόσα θα βγουν και με την ίδια ιδιοτιμή, άρα η κατάσταση παραμένει $|z_+\rangle$.

Πολλαπλές Μετρήσεις Σπιν 1/2 — Πείραμα 2

Σωματίδια με σπιν 1/2 στέλνονται μέσα από δύο συνεχόμενες συσκευές Stern-Gerlach (SG) προσανατολισμένες η πρώτη στον άξονα z και η δεύτερη στον άξονα x.

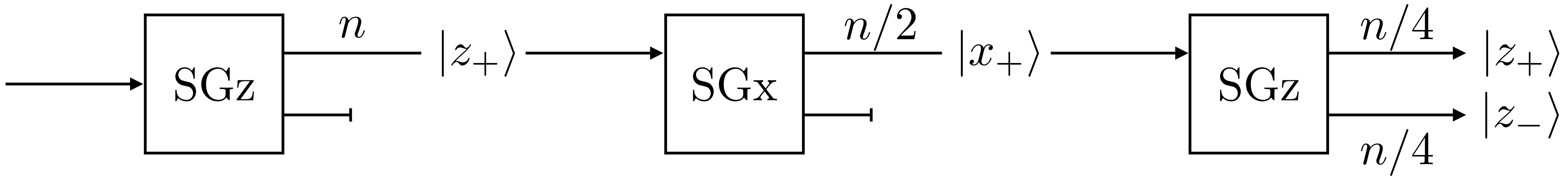


Όπως και στο πρώτο πείραμα μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τα σωματίδια που περάσαν από τη συσκευή SGz ως $|z_+\rangle$.

Περνώντας από τη δεύτερη εφόσον ο προσανατολισμός άλλαξε και τα μισά έχουν την ιδιοτιμή $+\hbar/2$ και τα άλλα μισά $-\hbar/2$ οφείλουμε να τα χαρακτηρίσουμε ως $|x_+\rangle$ και $|x_-\rangle$ αντίστοιχα.

Πολλαπλές Μετρήσεις Σπιν 1/2 — Πείραμα 3

Σωματίδια με σπιν 1/2 στέλνονται μέσα από τρεις συνεχόμενες συσκευές Stern-Gerlach (SG) προσανατολισμένες η πρώτη στον άξονα z, η δεύτερη στον άξονα x, και η τρίτη στον άξονα z.



Όπως και στα προηγούμενα πειράματα μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τα σωματίδια που περάσαν από την πρώτη συσκευή SGz ως $|z_+\rangle$.

Όπως και στο δεύτερο πείραμα μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τα σωματίδια που περάσαν από τη συσκευή SGx με ιδιοτιμή $+\hbar/2$ ως $|x_+\rangle$.

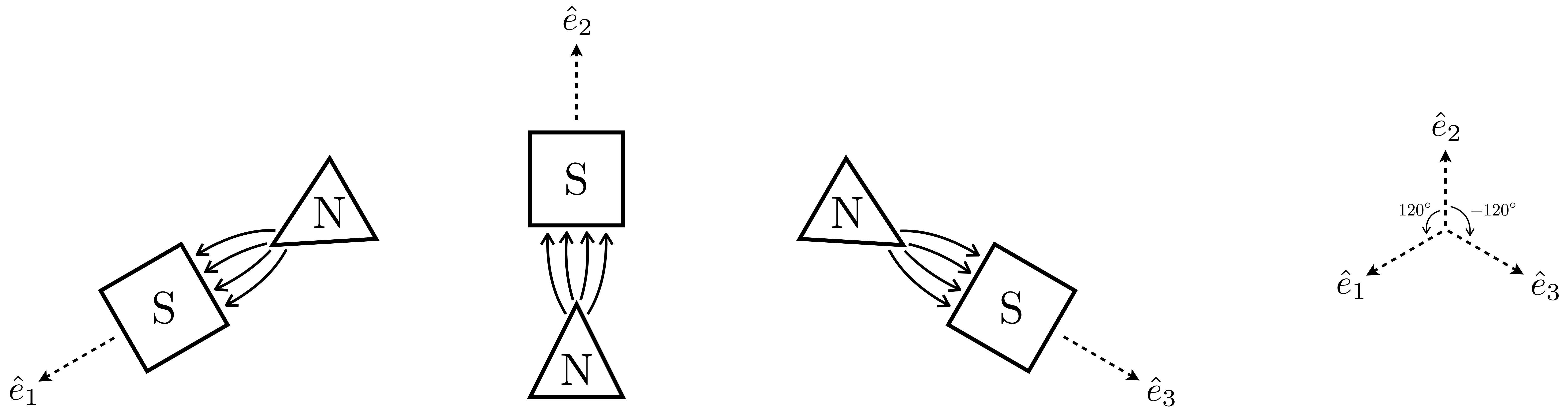
Το γεγονός πως μετά τη δεύτερη συσκευή SGz τα σωματίδια ξαναπαίρνουν με ίση πιθανότητα δύο διακριτές ιδιοτιμές, σημαίνει πως <u>δε μπορούμε να περιγράψουμε το σύστημα ως μια μίξη καταστάσεων $|z_+\rangle$ και $|x_+\rangle$</u> .

<u>Η κβαντική μέτρηση είναι μια φυσική διαδικασία που δε συνάδει με την κλασική μας διαίσθηση</u>.

Κβαντική Μέτρηση Ασυμβίβαστων Ιδιοτήτων

Έστω πως ένα σωματίδιο με σπιν 1/2 έχει μια μαγνητική ροπή $\vec{M}$.

Έχουμε τρεις συσκευές Stern-Gerlach σε τρεις διαφορετικούς προσανατολισμούς.



Σε αυτούς τους προσανατολισμούς η μαγνητική ροπή αναλύεται ως εξής: $M_1 = \vec{M}\,\hat{e}_1 \quad M_2 = \vec{M}\,\hat{e}_2 \quad M_3 = \vec{M}\,\hat{e}_3$

Και οι τρεις τελεστές έχουν δύο ίδιες ιδιοτιμές: $\pm\mu$

Αυτό δημιουργεί την εξής <u>ασυνέπεια</u>: $M_1 + M_2 + M_3 = \vec{M} \cdot (\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3) = 0$

Η ασυνέπεια προκύπτει επειδή θεωρήσαμε ότι για το ίδιο σύστημα οι μετρούμενες τιμές τριών μη-συμβατών ιδιοτήτων μπορούν ταυτόχρονα να ληφθούν υπόψην σε μια εξίσωση.