

Κβαντομηχανική II

Διάλεξη 9

28 Νοεμβρίου 2025

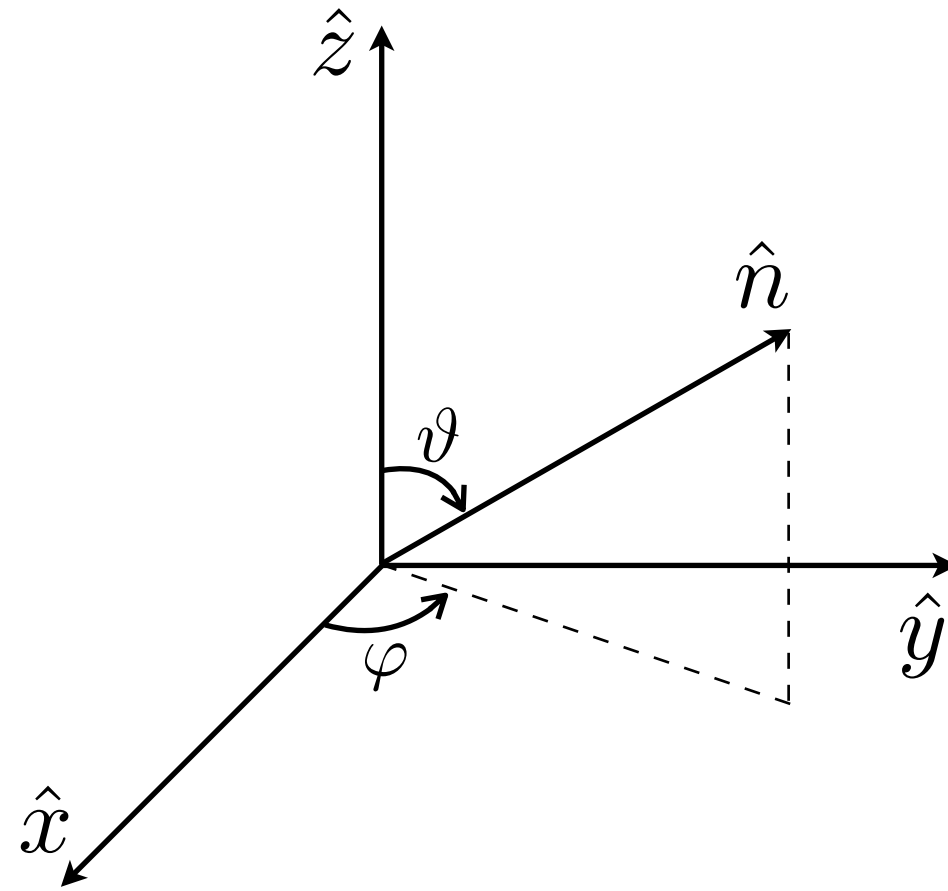
Σπύρος Τσέρκης



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

DEMOCRITUS
UNIVERSITY
OF THRACE

Διάνυσμα του Σπιν 1/2



Το διάνυσμα του σπιν 1/2 στον χώρο γράφεται ως

$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi) \hat{x} + (\sin \theta \sin \varphi) \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

όπου $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ και $0 \leq \theta \leq \pi$

Στο επίπεδο xy: $\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2 \Rightarrow \vec{n}_{xy} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}$

Στο επίπεδο xz: $\sin \theta \sin \varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \vec{n}_{xz} = \sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z}$

Στο επίπεδο yz: $\sin \theta \cos \varphi = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2 \Rightarrow \vec{n}_{yz} = \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$

Άρα η εξίσωση ιδιοτιμών σε μια τυχαία κατεύθυνση είναι: $\vec{n} \cdot \vec{S} |s, m_s\rangle = \hbar m_s |s, m_s\rangle$

Σωματίδιο Με Σπιν 1

Για ένα σωματίδιο με σπιν $s = 1$ ο κβαντικός αριθμός m_s λαμβάνει τρεις τιμές: $m_s = 1$, $m_s = 0$ και $m_s = -1$

Το σωματίδιο συνεπώς μπορεί να βρεθεί στις παρακάτω τρεις καταστάσεις:

$$|s, m_s\rangle = |1, 1\rangle \quad |s, m_s\rangle = |1, 0\rangle \quad |s, m_s\rangle = |1, -1\rangle$$

Για τους πίνακες S^2 και S_z έχουμε:

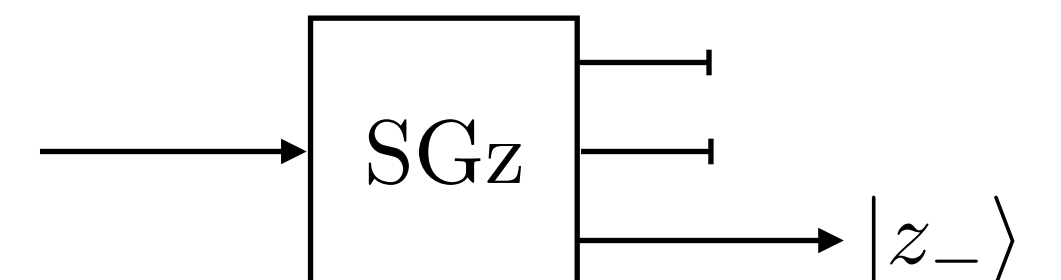
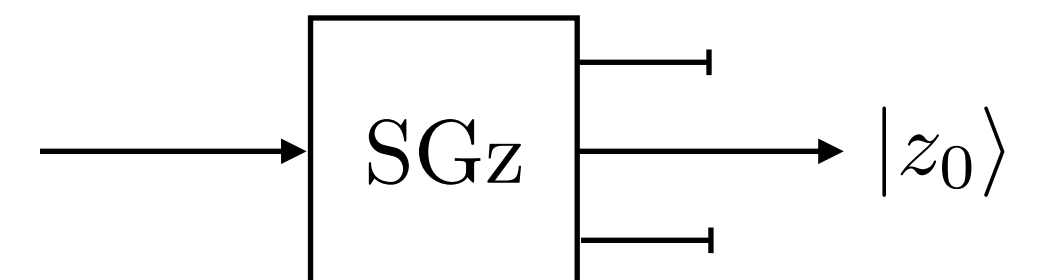
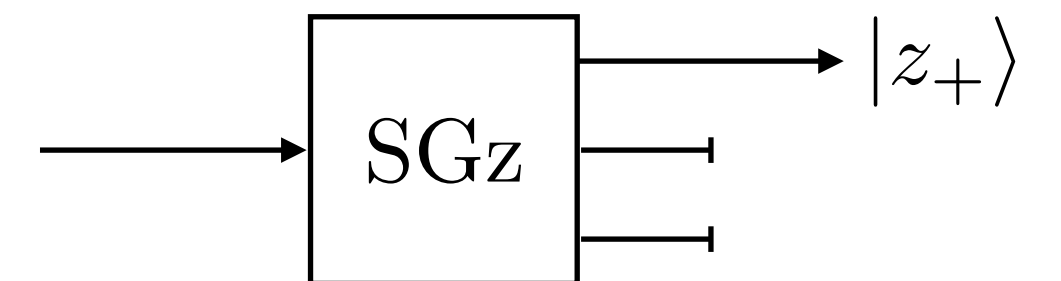
$$S^2 = 2\hbar^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_z = \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμή: $\hbar$ Ιδιοδιάνυσμα: $|1, 1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = |z_+\rangle$

Ιδιοτιμή: 0 Ιδιοδιάνυσμα: $|1, 0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |z_0\rangle$

Ιδιοτιμή: $-\hbar$ Ιδιοδιάνυσμα: $|1, -1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |z_-\rangle$

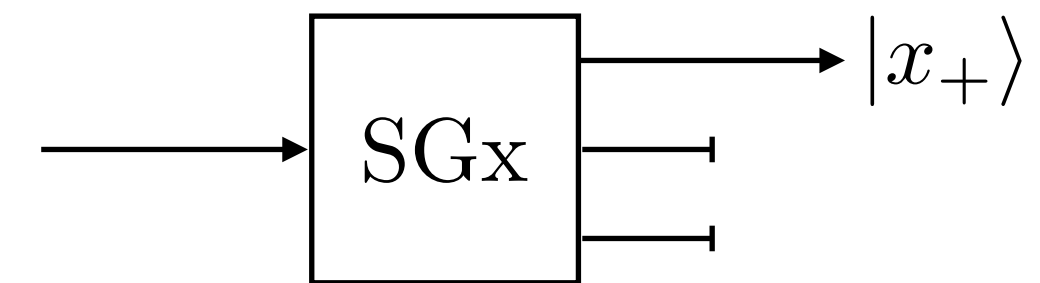


Δείτε παράδειγμα 5.3

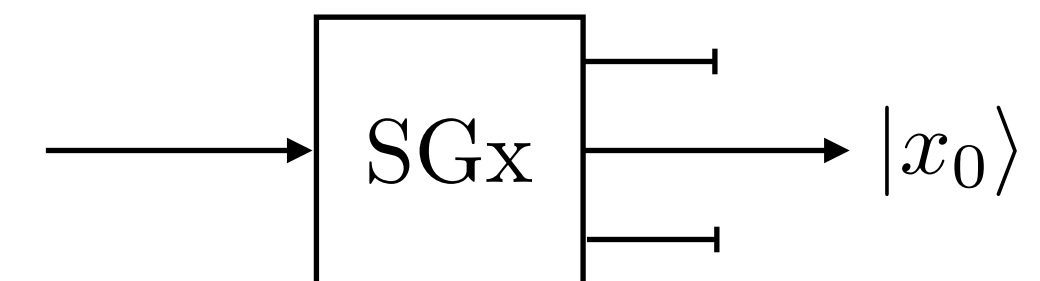
Σωματίδιο Με Σπιν 1

Για τον πίνακα S_x έχουμε: $S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

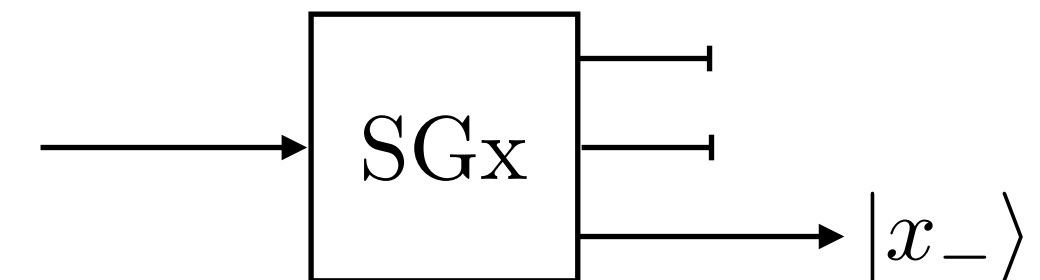
Ιδιοτιμή: $\hbar$ Ιδιοδιάνυσμα: $|1, 1\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = |x_+\rangle$



Ιδιοτιμή: 0 Ιδιοδιάνυσμα: $|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = |x_0\rangle$



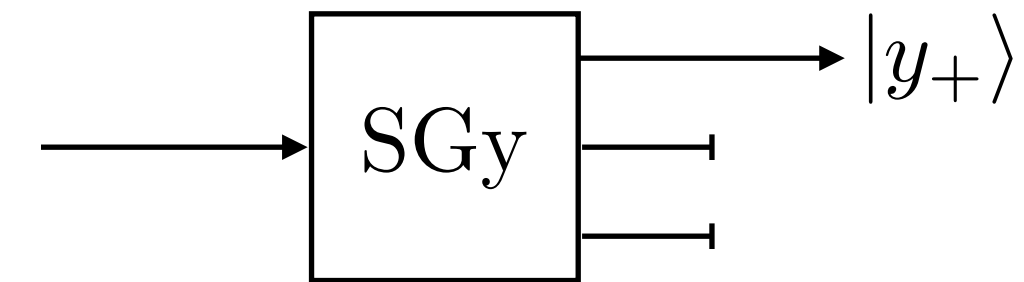
Ιδιοτιμή: $-\hbar$ Ιδιοδιάνυσμα: $|1, -1\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = |x_-\rangle$



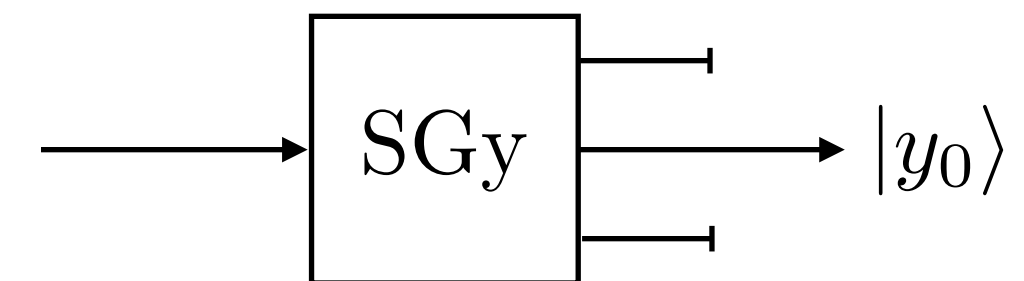
Σωματίδιο Με Σπιν 1

Για τον πίνακα S_y έχουμε: $S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$

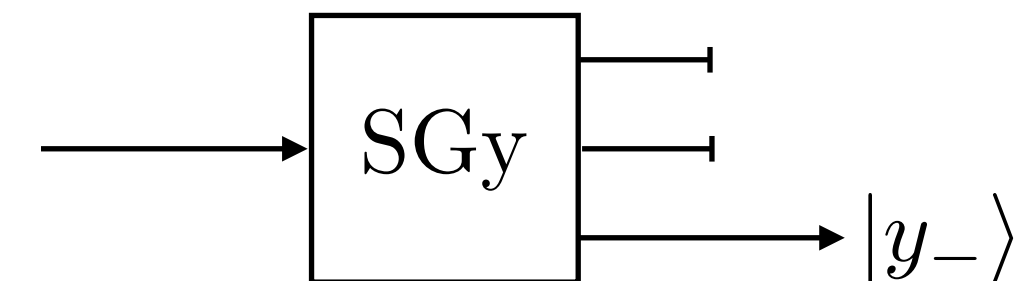
Ιδιοτιμή: $\hbar$ Ιδιοδιάνυσμα: $|1, 1\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \\ -1 \end{bmatrix} = |y_+\rangle$



Ιδιοτιμή: 0 Ιδιοδιάνυσμα: $|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |y_0\rangle$

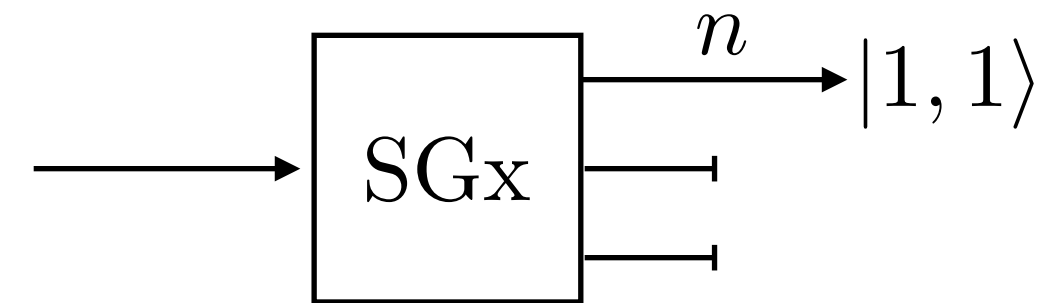


Ιδιοτιμή: $-\hbar$ Ιδιοδιάνυσμα: $|1, -1\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \\ -1 \end{bmatrix} = |y_-\rangle$



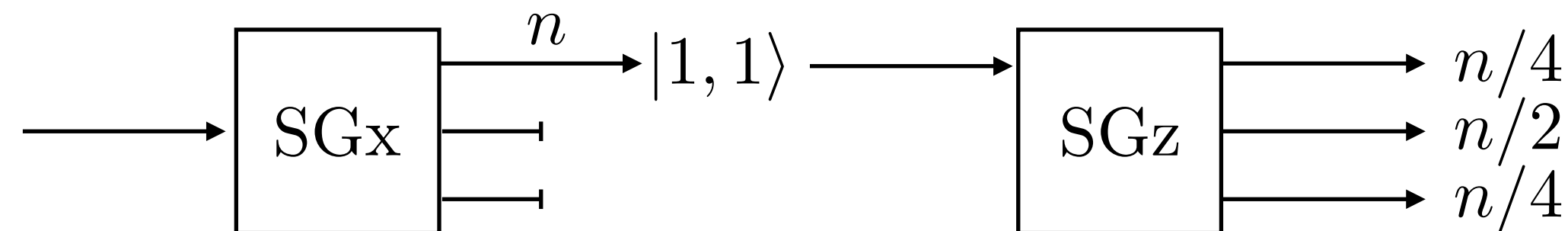
Πολλαπλές Μετρήσεις Σπιν

Σωματίδια με σπιν 1 στέλνονται μέσα από μία συσκευή Stern-Gerlach (SG) προσανατολισμένη στον άξονα x και μόνο αυτά με ιδιοτιμή $\hbar$ αφήνονται να εξέλθουν.



$$\text{Η κατάσταση τότε είναι: } |1, 1\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} |z_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |z_0\rangle + \frac{1}{2} |z_-\rangle$$

Στη συνέχεια τοποθετούμε μια δεύτερη συσκευή SG με προσανατολισμό στον άξονα z.



Άρα ο τελεστής S_x δεν είναι συμπληρωματικός με τον τελεστή S_z . Αυτοί οι τελεστές ήταν συμπληρωματικοί για σωματίδιο με σπιν 1/2.

Η Συνολική Κβαντική Κατάσταση

Η συνολική κατάσταση θα είναι το τανυστικό γινόμενο της χωρικής κατάστασης και της κατάσταση σπιν

$$|\Psi\rangle = |\psi_{n,\ell,m_\ell}(\vec{r})\rangle \otimes |s, m_s\rangle$$

Κβαντικοί αριθμοί σωματιδίου που αλλάζουν:

n : ενεργειακή στάθμη

ℓ : μέτρο της στροφορμής

m_ℓ : προβολή της τροχιακής στροφορμής

m_s : προβολή του σπιν

Κβαντικοί αριθμοί σωματιδίου που δεν αλλάζουν:

m : μάζα

q : φορτίο

s : σπιν